IV. LINEÁRIS ALGEBRA

10. A szabadvektorok

Az euklideszi tér **két félegyenes**éről azt mondjuk, hogy **egyállású**, ha párhuzamosak, és vagy egybeesnek, vagy kezdőpontjaik által meghatározott egyenessel párhuzamosan az egyik a másikra mozgatható. Nyilván ez ekvivalenciareláció a félegyenesek halmazán; azt mondjuk, hogy az egyállású félegyenesek osztálya a **tér egy irányá**t határozza meg.

Az (euklideszi) tér pontjainak rendezett párjait **(térbeli) irányított szakaszoknak**, az elempár első tagját **kezdőpont**nak, második tagját **végpont**nak nevezzük. Az $(A, B), (C, D)$ **irányított szakaszok**ról azt mondjuk, hogy **kongruensek**, ha $A = B$ és $C = D$, vagy az AB és CD hosszak megegyeznek, és az A kezdőpontú a B pontot tartalmazó félegyenes és a C kezdőpontú a D pontot tartalmazó félegyenes egyállású.

10.1.Állítás. *Az irányított szakaszok közötti kongruencia ekvivalenciareláció.*

Bizonyítás. A reflexivitás és a szimmetria világos. Legyen az (A, B) és (C, D) illetve a (C, D) és (E, F) irányított szakaszok kongruensek. Ha bármelyik pontpár kezdő- és végpontja egybeesik, akkor nyilván mindhárom pontpárra ez teljesül. Ellenkező esetben azonnal adódik, hogy mindhárom félegyenes egyállású, és mindhárom szakasz hossza megegyezik. $\square$

Az irányított szakaszok közötti kongruencia ekvivalenciaosztályait **(térbeli) szabadvektorok**nak nevezzük, jelölés: az (A, B) irányított szakasz által reprezentált szabadvektor $\overrightarrow{AB}$, illetve (gyakran) az (O, A) irányított szakasz által reprezentált szabadvektor a. A térbeli szabadvektorok halmazát jelölje $\mathbb{V}$. Az (A, A) irányított szakasz által reprezentált szabadvektort **nullvektor**nak nevezzük, jelölése o. Az $\overrightarrow{AB}$ **szabadvektor hosszá**nak nevezzük a szakasz AB hosszát, jelölése $|\overrightarrow{AB}|$. Az $\overrightarrow{AB}$ nemzérus **szabadvektor irányá**nak nevezzük az A kezdőpontú a B pontot tartalmazó félegyenes irányát. A zérusvektorhoz nem rendelünk irányt, vagy néha azt is mondjuk, hogy iránya tetszőleges. Szabadvektor hossza és iránya nyilván független a reprezentánsválasztástól.

Azt is mondhatjuk, hogy két szabadvektor egyenlő, ha megegyeznek hosszaik és irányaik. Könnyen látható, hogy egy szabadvektort tetszőleges kezdőpontú irányított szakasz reprezentálhat (innen az elnevezés), és a kezdőpont rögzítése után a végpont már egyértelműen meghatározott. Gyakran alkalmazott módszer egy adott pont, az úgynevezett **origó** rögzítése után a tér pontjait azonosítani az origóból odamutató **helyvektor**okkal.

Analóg módon határozható meg az (euklideszi) síkbeli szabadvektor fogalma.

Két szabadvektor, a és b **összegét** a következőképpen határozzuk meg. Reprezentáljuk a szabadvektorokat úgy, hogy a végpontja a b kezdőpontja legyen, azaz $a = \overrightarrow{AB}$ és $b = \overrightarrow{BC}$. Ekkor legyen $a + b = \overrightarrow{AC}$.

Legyen λ egy nemnegatív valós skalár, $\overrightarrow{AB}$ egy szabadvektor. Az $\overrightarrow{AB}$ **szabadvektor** $\lambda \geq 0$ **skalárszorosa** az $\lambda\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ szabadvektor, amelyre teljesül, hogy a C pont illeszkedik az A kezdőpontú a B pontot tartalmazó félegyenesre, és hossza az $\overrightarrow{AB}$ szabadvektor hosszának λ-szorosa. Legyen λ egy negatív valós skalár, $\overrightarrow{AB}$ egy szabadvektor. Az $\overrightarrow{AB}$ **szabadvektor** $\lambda < 0$ **skalárszorosa** az $\lambda\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ szabadvektor, amelyre teljesül, hogy a C pont nem illeszkedik az A kezdőpontú a B pontot tartalmazó félegyenesre, és hossza az $\overrightarrow{AB}$ szabadvektor hosszának $-\lambda$-szorosa.

10.2.Tétel.

(i) A $(\mathbb{V}, +)$ struktúra Abel-csoport;

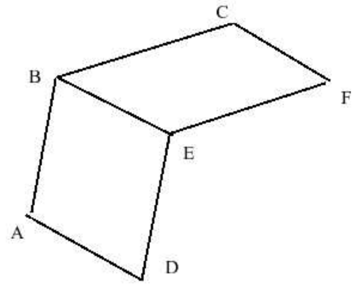
(ii) *minden* λ *skalárra és* a, b *szabadvektorra* $\lambda(a+b) = \lambda a + \lambda b$*;*

(iii) *minden* λ, μ *skalárra és* a *szabadvektorra* $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$*;*

(iv) *minden* λ, μ *skalárra és* a *szabadvektorra* $(\lambda\mu)a = \lambda(\mu a)$*;*

(v) *minden* a *szabadvektorra* $1a = a$ *és* $0a = o$*.*

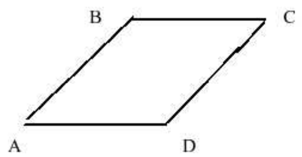
Bizonyítás. (i) *Az összeadás jóldefiniált.* Legyen $a = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DE}$ és $b = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{EF}$. Be kell látni, hogy $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DF}$. Ha $A = B$ vagy $B = C$ vagy $C = A$ akkor ez ny-



ilvánvaló. Ellenkező esetben az (A, B) és (D, E) irányított szakaszok hossza megegyezik, és az általuk meghatározott félegyenesek egyállásúak, illetve a (B, C) és (E, F) irányított szakaszok hossza megegyezik és az általuk meghatározott félegyenesek egyállásúak. Következésképp az ABC és DEF háromszögek egybevágóak, oldalaik rendre párhuzamosak, és az A kezdőpontú a C pontot tartalmazó félegyenes és a D kezdőpontú az F pontot tartalmazó félegyenes egyállású.

Az összeadás asszociatív. Legyen $a = \overrightarrow{AB}$, $b = \overrightarrow{BC}$, $c = \overrightarrow{CD}$. Ekkor egyrészt $(a+b)+c = \overrightarrow{AC} + c = \overrightarrow{AD}$, másrészt $a + (b+c) = a + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$.

Az összeadás kommutatív. Legyen $a = \overrightarrow{AB}$ és $b = \overrightarrow{BC}$. Be kell látni, hogy $a + b = b + a$. Ha a vagy b a zérusvektor, akkor nincs mit belátni. Ha nem, akkor

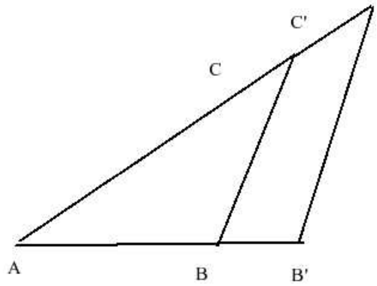


legyen D az ABC síknak az a pontja, amelyre $ABCD$ paralellogramma. Ekkor $b + a = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} = a + b$.

Nyilván a zérusvektor *additív neutrális elem* és az $\overrightarrow{AB}$ szabadvektor *ellentettje* a $\overrightarrow{BA}$ szabadvektor. A $(\mathbb{V}, +)$ struktúra valóban Abel-csoport.

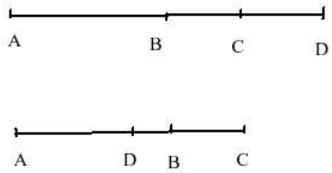
A skalárral való szorzás jóldefiniált. Egyszerűen látható, gyakorlat.

(ii) Ha $\lambda = 0$ az állítás nyilvánvaló. Legyen $\lambda > 0$, $a = \overrightarrow{AB}$, $b = \overrightarrow{BC}$, , $\lambda a = \overrightarrow{AB'}$, $\lambda b = \overrightarrow{B'C'}$. Ekkor $a + b = \overrightarrow{AC}$, $\lambda a + \lambda b = \overrightarrow{AC'}$. Mivel az ABC és $AB'C'$ háromszögek



hasonlók, $\lambda(a+b) = \overrightarrow{AC'}$. Ha $\lambda < 0$ akkor az A pontra történő középpontos tükrözés után ugyanezt a gondolatmenetet alkalmazhatjuk.

(iii) Ha az egyik skalár 0, az állítás nyilvánvaló. Legyen mindkét skalár pozitív, $a = \overrightarrow{AB}$,



$\lambda a = \overrightarrow{AC}$, $\mu a = \overrightarrow{CD}$. Ekkor $(\lambda+\mu)a = \overrightarrow{AD}$, és mivel $AD = (\lambda+\mu)AB$, nyilván $(\lambda+\mu)a = \overrightarrow{AD}$. Ha mindkét skalár negatív, akkor az A pontra történő középpontos tükrözés után ugyanezt a gondolatmenetet alkalmazhatjuk. Legyen most a kisebbik abszolútértékű skalár negatív, $a = \overrightarrow{AB}$, $\lambda a = \overrightarrow{AC}$, , $\mu a = \overrightarrow{CD}$. Ekkor $(\lambda+\mu)a = \overrightarrow{AD}$, és mivel $AD = (\lambda+\mu)AB$, nyilván $(\lambda+\mu)a = \overrightarrow{AD}$. Ha a nagyobbik abszolútértékű skalár negatív, akkor az A pontra történő középpontos tükrözés után ugyanezt a gondolatmenetet alkalmazhatjuk.

(iv) Ha az egyik skalár 0, az állítás nyilvánvaló. Legyen mindkét skalár pozitív, $a = \overrightarrow{AB}$, $\mu a = \overrightarrow{AC}$, $(\lambda\mu)a = \overrightarrow{AD}$ mivel $AD = \lambda\mu AB$, nyilván $\lambda(\mu a) = \overrightarrow{AD}$. Ha mindkét skalár negatív, akkor $(\lambda\mu)a = ((-\lambda)(-\mu))a = (-\lambda)(-\mu a) = -(-lambda)(\mu a) = \lambda(\mu a)$. Legyen most $\lambda > 0$ és $\mu < 0$. Ekkor $(\lambda\mu)a = -(\lambda(-\mu))a = -\lambda(-\mu a) = \lambda(\mu a)$. Ha $\lambda < 0$ és $\mu > 0$, hasonló gondolatmenet alkalmazható.

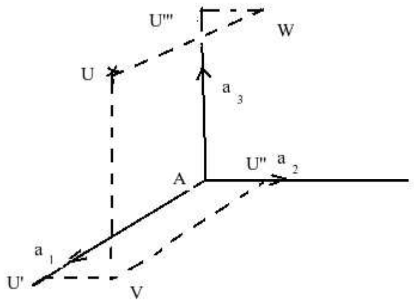
(v) Nyilvánvaló. □

Azt mondjuk, hogy egy **szabadvektor párhuzamos egy egyenessel (síkkal)** (illeszkedik egy egyenesre vagy síkra), ha a vektort reprezentáló valamely (és ezért bármely) irányított szakasz pontjai által meghatározott egyenes párhuzamos az egyenessel (síkkal). A zérusvektort bármely egyenessel (síkkal) párhuzamosnak tekintjük. Adott síkkal (egyenessel) párhuzamos vektorokat **komplanáris (kollineáris) vektorok**nak nevezzük.

10.3.Állítás. *Ha a_1, a_2, a_3 három (térbeli) szabadvektor, amelyek egyszerre nem párhuzamosak valamely síkkal, akkor tetszőleges u vektor előállítható egyértelműen $u = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3$ alakban, ahol α_1, α_2 és α_3 valós skalárok.*

Bizonyítás. Egzisztencia. Legyen $a_1 = \overrightarrow{AA_1}$, $a_2 = \overrightarrow{AA_2}$, $a_3 = \overrightarrow{AA_3}$ $u = \overrightarrow{AU}$. Az A, A_1, A_2

pontok nincsenek egy egyenesen, mert ekkor az a_i szabadvektorok párhuzamosak lennének az A, A_1, A_2, A_3 pontokat tartalmazó síkkal. Az A_3 pont nincsen az AA_1A_2 síkon, mert ekkor az a_i vektorok párhuzamosak lennének a síkkal.



Az U pont vetülete az AA_1A_2 síkon az $\overleftrightarrow{AA_3}$ egyenessel párhuzamos vetítésnél legyen V. A V pont vetülete legyen U' az $\overleftrightarrow{AA_1}$ egyenesen az $\overleftrightarrow{AA_2}$ egyenessel párhuzamos vetítésnél, illetve legyen U'' a vetülete az $\overleftrightarrow{AA_2}$ egyenesen az $\overleftrightarrow{AA_1}$ egyenessel párhuzamos vetítésnél. Ekkor $\overrightarrow{AV} = \overrightarrow{AU'} + \overrightarrow{AU''}$ és valamely α_1, α_2 skalárokra $\overrightarrow{AV} = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$. Mivel az a_3 vektor párhuzamos az $\overleftrightarrow{UV}$ egyenessel, $\overrightarrow{VU} = \alpha_3 a_3$ valamely α_3 skalárra. Nyilván $\overrightarrow{AU} = \overrightarrow{AV} + \overrightarrow{VU}$ és $\overrightarrow{AW} = \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3$, ahonnan $u = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3$ adódik.

Unicitás. Legyen $a_1 = \overrightarrow{AA_1}$, $a_2 = \overrightarrow{AA_2}$, $a_3 = \overrightarrow{AA_3}$. Legyen továbbá $u = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3$ és $u = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \beta_3 a_3$. Ha $\alpha_1 \neq \beta_1$ akkor $(\alpha_1 - \beta_1)a_1 = (-\alpha_2 + \beta_2)a_2 + (-\alpha_3 + \beta_3)a_3$, ami azt jelenti, hogy az $\overleftrightarrow{AA_1}$ egyenes illeszkedik az AA_2A_3 síkra, ami lehetetlen, mert ekkor ezzel a síkkal mindhárom a_i vektor egyszerre párhuzamos lenne. Az $\alpha_2 \neq \beta_2$ illetve az $\alpha_3 \neq \beta_3$ esetekben hasonlóan érvelhetünk. □

Azt mondjuk, hogy három, síkkal egyszerre nem párhuzamos szabadvektor a **térbeli szabadvektorok bázisá**t alkotják, és az $u = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3$ előállításnál az α_i skalárokat az u vektor $\{a_i\}_{i=1,2,3}$ bázisbeli koordinátáinak nevezzük. Koordinátákkal megadott vektorokkal könnyű műveleteket végezni: Ha az $\{a_i\}_{i=1,2,3}$ bázisban az u vektor koordinátái $\{\mu_i\}_{i=1,2,3}$ illetve a v vektor koordinátái $\{\nu_i\}_{i=1,2,3}$ akkor az $\alpha u + \beta v$ vektor koordinátái $\{\alpha\mu_i + \beta\nu_i\}_{i=1,2,3}$.

Azt mondjuk, hogy a $v = \sum_{i=1}^{r} \gamma_i c_i$ szabadvektor a c_i vektorok **lineáris kombinációja**. Ha a $\{c_i\}_{i=1}^{r}$ vektorrendszer lineáris kombinációi kimerítik az összes szabadvektort, akkor a vektorrendszert **generátorrendszer**nek nevezzük. Bázis nyilván generátorrendszer. Ha a $\{c_i\}_{i=1}^{r}$ vektorrendszer lineáris kombinációjaként a zérusvektor csak egyféleképpen, csupa 0 együtthatóval állítható elő, akkor azt mondjuk, hogy a vektorrendszer **lineárisan független**; ellenkező esetben azt mondjuk, hogy **lineárisan függő**. Bázis nyilván lineárisan független. Könnyen látható, hogy térbeli szabadvektorok bázisa minimális, azaz 3 elemszámú generáttorrendszer, illetve maximális, azaz 3 elemszámú lineárisan független rendszer. Azt is mondjuk, hogy a **tér dimenziója** 3.

Azt mondjuk, hogy két **szabadvektor merőleges egymásra**, ha valamely (és ezért bármely) reprezentáns irányított szakaszaik által meghatározott egyenesek merőlegesek egymásra. A zérusvektort bármely vektorra merőlegesnek tekintjük. Vektorrendszert **ortogonális**nak nevezünk, ha tagjaik páronként merőlegesek egymásra. **Ortonormált bázis**nak nevezünk olyan bázist, amely ortogonális rendszer és a bázisvektorok hossza 1.

Altérnek nevezzük szabadvektoroknak olyan halmazát, amely zárt az összeadásra és a skalárral való szorzásra nézve. Az alterek nyilván négyfélék lehetnek: a $\{o\}$ zérusaltér; egy nemnulla vektor skalárszorosai, azaz egy adott egyenessel párhuzamos vektorok; két lineárisan független vektor összes lineáris kombinációja, azaz egy adott síkkal párhuzamos vektorok; három lineárisan független vektor összes lineáris kombinációja, azaz az összes szabadvektor. Ezek rendre a 0, 1, 2, és 3 dimenziós alterek.

Hasznos tekinteni a, b **két szabadvektor** $ab \in \mathbb{R}$ **skaláris (belső) szorzatát**: ha $a = \overrightarrow{AB}$, $b = \overrightarrow{AC}$ és $\alpha = BAC\angle$ a vektorok által közbezárt szög, akkor legyen $ab = |a||b|\cos\alpha$. Ez nem művelet, mivel két vektorhoz skalárt rendelünk.

10.4Állítás. *Legyen a, b, c szabadvektor és λ skalár. Ekkor az alábbi állítások teljesülnek:*

(i) $ab = ba$;

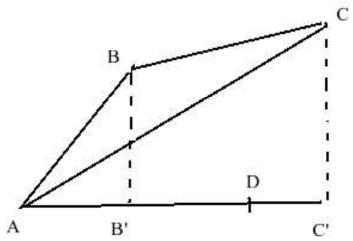
(ii) $(a + b)c = ac + bc$;

(iii $(\lambda a)b = \lambda(ab)$;

(iv) $ab = 0$ *pontosan akkor, ha az a és b vektorok merőlegesek egymásra;*

(v) *ha* $\{e_i\}_{i=1,2,3}$ *egy ortonormált bázis,* $a = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3$, $b = \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 + \mu_3 e_3$, *akkor* $ab = \lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2 + \lambda_3\mu_3$.

Bizonyítás. A (ii) és (v) állítást kivéve nyilvánvalóak.



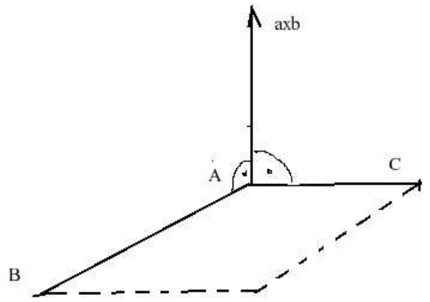
(ii) Vegyük észre, hogy a skaláris szorzat az egyik vektor vetületének előjeles hossza a másik vektor egyenesén. Ha c a zérusvektor, nincs mit belátni. Legyen $c \neq o$, $a = \overrightarrow{AB}$, $b = \overrightarrow{BC}$, $c = \overrightarrow{AD}$, B' a B pont vetülete az $\overleftrightarrow{AD}$ egyenesen, C' a C pont vetülete az $\overleftrightarrow{AD}$ egyenesen. Nyilván, előjeles hosszakat tekintve, $AC' = AB' + B'C'$, azaz a megfelelő közbezárt szögekkel $|a + b|\cos\gamma = |a|\cos\alpha + |b|\cos\beta$. Ezt az összefüggést beszorozva a c vektor hosszával a bizonyítandó állítást kapjuk.

(v) Az előzőek alapján

$$ab = (\sum_{i=1}^{3} \lambda_i e_i)(\sum_{j=1}^{3} \mu_j e_j) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \lambda_i \mu_j e_i e_j.$$

Az ortogonalitás miatt ha $i \neq j$ akkor $e_i e_j = 0$, ha $i = j$ akkor $e_i e_i = |e_i|^2 = 1$, ezeket a fenti összefüggésbe beírva kapjuk az állítást. □

Vektorok közötti művelet a **vektoriális (kereszt-) szorzat**. Két szabadvektor, $a = \overrightarrow{AB}$ és $b = \overrightarrow{AC}$ vektoriális szorzata az $a \times b = \overrightarrow{AD}$ vektor, amely zérusvektor, ha az a és b vektorok lineárisan függők, ellenkező esetben az $a \times b$ vektor hossza $|a||b|\sin\alpha$, ahol α az a és b vektorok által közbezárt szög, az irányát pedig úgy határozhatjuk meg, hogy az $\overleftrightarrow{AD}$ egyenes merőleges az ABC síkra, és az $a, b, a \times b$ vektorok ebben a sorrendben úgynevezett jobbsodrású rendszert alkotnak, amelyet az ábra szemléltet. Vegyük észre, hogy a vektoriális szorzat úgynevezett területvektor: hossza a vektorok által kifeszített paralelogramma előjeles



területe.

10.5.Állítás. *Legyen a, b, c szabadvektor és λ skalár. Ekkor az alábbi állítások teljesülnek:*

(i) $a \times b = -b \times a$;

(ii) $(\lambda a) \times b = \lambda(a \times b)$ *és* $a \times (\lambda b) = \lambda(a \times b)$;

(iii) $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ *és* $(a + b) \times c = a \times c + b \times c$;

(iv) $a \times b = o$ *pontosan akkor, ha az* a *és* b *vektorok lineárisan függők;*

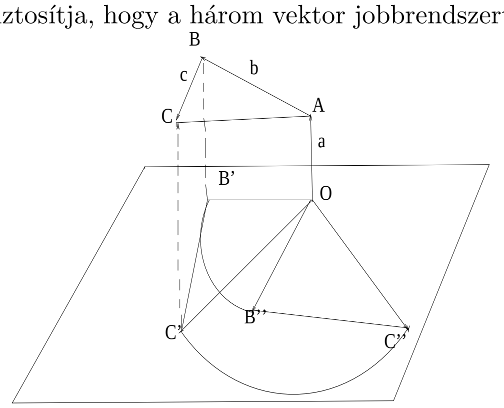
(v) ha $\{e_i\}_{i=1,2,3}$ *egy ortonormált bázis úgy, hogy* $e_3 = e_1 \times e_2$, $a = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3$, $b = \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 + \mu_3 e_3$, *akkor* $a \times b =$

$$(\lambda_2\mu_3 - \lambda_3\mu_2)e_1 + (\lambda_3\mu_1 - \lambda_1\mu_3)e_2 + (\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1)e_3;$$

(vi) $(a \times b) \times c + (b \times c) \times a + (c \times a) \times b = o$.

Bizonyítás. Az (i) és (ii) állítás nyilvánvaló.

(iii) Az (i) állítás miatt elegendő az első disztributív törvényt belátni. Ha valamelyik vektor zérusvektor, nincs mit belátni. Ellenkező esetben a (ii) állítás miatt feltehetjük, hogy a egységvektor, azaz hossza 1. Vegyük észre, hogy tetszőleges u vektor esetén az $a \times u$ vektort meghaphatjuk úgy, hogy az u vektort levetítjük egy, az a egységvektorra merőleges síkra, és elforgatjuk az a vektor iránya felől nézve az óramutató járásával ellenkező irányban. Valóban, ennek a vektornak a hossza megegyezik az u vektor hosszával szorozva az a egységvektor és a u vektor szögének szinuszával, merőleges mind az a mind az u vektorra és az elforgatás iránya biztosítja, hogy a három vektor jobbrendszert alkosson.



Felhasználva ezt a tényt legyen az a egységvektor $\overrightarrow{OA}$, $b = \overrightarrow{AB}$, $c = \overrightarrow{BC}$, a B illetve C pontok merőleges vetületei az O pontot tartalmazó az a vektorra merőleges síkra B' illetve C', ezek elforgatottjai a fentieknek megfelelő irányban B'' illetve C''. Ekkor $a \times b = \overrightarrow{AB''}$, $a \times c = \overrightarrow{B''C''}$ és $a \times (b + c) = \overrightarrow{AC''}$, azaz $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$.

A (iv) állítás nyilvánvaló.

(v) Mivel $e_1 \times e_2 = e_3$, kapjuk, hogy $e_2 \times e_1 = -e_3$, $e_1 \times e_3 = -e_2$, $e_3 \times e_1 = e_2$, $e_2 \times e_3 = e_1$, $e_3 \times e_2 = -e_1$. Ezt és az előzőeket felhasználva

$$a \times b = (\sum_{i_1}^{3} \lambda_i e_i) \times (\sum_{j_1}^{3} \mu_j e_j) = \sum_{i_1}^{3} \sum_{j_1}^{3} \lambda_i \mu_j (e_i \times e_j) =$$

$$(\lambda_2\mu_3 - \lambda_3\mu_2)e_1 + (\lambda_3\mu_1 - \lambda_1\mu_3)e_2 + (\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1)e_3.$$

(vi) Az $\{e_i\}_{i=1,2,3}$ ortonormált bázisvektorok keresztszorzataira az (v) állítás bizonyításánál megadott formulákból egyből látszik, hogy a bizonyítandó úgynevezett Jacobi-féle azonosság a bázisvektorokra teljesül: $(e_i \times e_j) \times e_k + (e_j \times e_k) \times e_i + (e_k \times e_i) \times e_j = o$. Ezt lineárisan kiterjesztve kapjuk az általános azonosságot. $\square$

Az a, b és c **szabadvektorok vegyesszorzata** legyen az $(a, b, c) = (a \times b)c$ skalár. A vegyesszorzás nem művelet, mivel három vektorhoz skalárt rendel.

10.6. Állítás. *Legyen a, b, c, d szabadvektor és λ, μ skalár. Ekkor az alábbi állítások teljesülnek:*

(i) $(a, b, c) = (b, c, a) = (c, a, b)$ *és* $(a, b, c) = -(b, a, c) = -(a, c, b) = -(c, b, a)$*;*

(ii) a leképezés mindhárom változójában lineáris, azaz például az első változóban $(\lambda a + \mu b, c, d) = \lambda(a, c, d) + \mu(b, c, d)$*;*

(iii) $(a, b, c) = 0$ *pontosan akkor, ha az a, b, c vektorok lineárisan függők;*

(iv) ha $\{e_i\}_{i=1,2,3}$ egy ortonormált bázis úgy, hogy $e_3 = e_1 \times e_2$, $a = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3$, $b = \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 + \mu_3 e_3$, $c = \nu_1 e_1 + \nu_2 e_2 + \nu_3 e_3$, akkor $(a, b, c) =$

$$\lambda_1\mu_2\nu_3 + \lambda_2\mu_3\nu_1 + \lambda_3\mu_1\nu_2 - \lambda_1\mu_3\nu_2 - \lambda_2\mu_1\nu_3 - \lambda_3\mu_2\nu_1.$$

Bizonyítás. Ha a vektorok lineárisan függők, a vegyesszorzat értéke nyilván 0. Ha a vektorok lineárisan függetlenek, vegyük észre, hogy a vegyesszorzat értéke nem más, mint az általuk kifeszített paralelepipedon előjeles térfogata. Innen világos (i) és (iii). A (ii) állítás következik a vektoriális és skaláris szorzás megfelelő tulajdonságaiból. A (iv) állítás következik a 10.4(v) és a 10.5(v) állításból. $\square$

Koordinátageometriai megfontolásainkhoz az O origó rögzítése után azonosíthatjuk a tér pontjait az odamutató helyvektorokkal. Ilyen ételemben beszélhetünk térelemek vektoros egyenletéről. **Sík normálvektorá**nak nevezzük a síkra merőleges nemzérus vektort. **Egyenes irányvektorá**nak nevezzük az egyenessel párhuzamos nemzérus vektort.

10.7. Állítás.

(i) Legyen adott egy sík egy A pontjával, $a = \overrightarrow{OA}$, és az n normálvektorával, és a futópont helyvektora legyen p. Ekkor a sík úgynevezett normálvektoros egyenlete $n(p - a) = 0$.

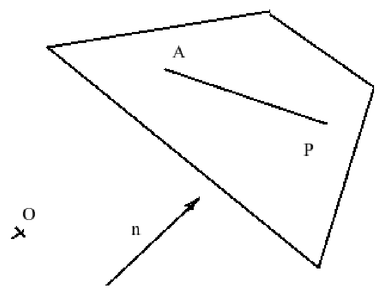
(ii) Legyen adott egy sík egy A pontjával, $a = \overrightarrow{OA}$, és két, a síkkal párhuzamos lineárisan független u és v vektorral, és a futópont helyvektora legyen p. Ekkor a sík úgynevezett paraméteres vektoregyenlete $p = a + ru + tv$ $(r, t \in \mathbb{R})$.

(iii) Legyen adott egy egyenes mint két metsző sík metszésvonala, és a futópont helyvektora legyen p. Ekkor az egyenes egyenletrendszere

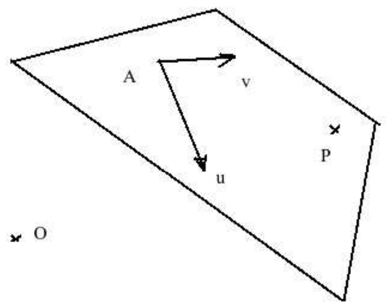
$$n(p - a) = 0$$
$$n'(p - a') = 0,$$

ahol a két egyenlet a két sík normálvektoros egyenlete.

(iv) Legyen adott egy egyenes egy A pontjával, $a = \overrightarrow{OA}$, és az u irányvektorával, és a futópont helyvektora legyen p. Ekkor az egyenes úgynevezett irányvektoros egyenlete $p = a + tu$, ahol $t \in \mathbb{R}$.

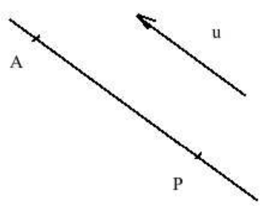


Bizonyítás. (i) Az $n(p - a)$ skaláris szorzat értéke pontosan akkor 0, ha a $p - a$ vektor merőleges az n vektorra, ami pontosan akkor teljesül, ha a $p - a$ vektor párhuzamos a síkkal, azaz a p vektor a sík egy pontjának helyvektora.



(ii) Az $ru + tv$ vektor párhuzamos a síkkal, így $a + ru + tv$ a sík egy pontjának helyvektora. Ha p a sík egy pontjának helyvektora, akkor a $p - a$ vektor párhuzamos a síkkal, így előáll a lineárisan független u és v vektorok valamely lineáris kombinációjaként.

(iii) Nyilván mindkét egyenletet pontosan a metszésvonal pontjaiba mutató helyvektorok elégítik ki.



(iv) Mivel a az egyenes egy pontjának helyvektora és a tu vektor párhuzamos az egyenessel, $a + tu$ az egyenes egy pontjának helyvektora. Ha p az egyenes egy pontjának helyvektora akkor a $p - a$ vektor párhuzamos az egyenessel, ezért skalárszorosa az u irányvektornak. $\square$

Rögzítsünk ortonormált $\{e_i\}_{i=1,2,3}$ bázist, és a tér pontjait azonosítsuk az odamutató helyvektorok bázisbeli koordinátái alkotta rendezett számhármasokkal.

Tekintsük a sík $n(p-a)=0$ normálvektoros egyenletét, és legyen $n=n_1e_1+n_2e_2+n_3e_3$, $p=xe_1+ye_2+ze_3$, $a=a_1e_1+a_2e_2+a_3e_3$. Ekkor

$$0=n(p-a)=(n_1e_1+n_2e_2+n_3e_3)((x-a_1)e_1+(y-a_2)e_2+(z-a_3)e_3)=$$

$$n_1x+n_2y+n_3z-(n_1a_1+n_2a_2+n_3a_3)$$

azaz **sík normálvektoros skaláregyenlete** $n_1x+n_2y+n_3z-(n_1a_1+n_2a_2+n_3a_3)=0$.

Tekintsük a sík $p=a+su+tv$ paraméteres egyenletét, és legyen $u=u_1e_1+u_2e_2+u_3e_3$, $v=v_1e_1+v_2e_2+v_3e_3$, $p=xe_1+ye_2+ze_3$, $a=a_1e_1+a_2e_2+a_3e_3$. Ekkor

$$xe_1+ye_2+ze_3=(a_1+su_1+tv_1)e_1+(a_2+su_2+tv_2)e_2+(a_3+su_3+tv_3)e_3$$

amiből a koordináták egyértelműsége miatt a **sík paraméteres egyenletrendszere** következik:

$$\begin{aligned} x&=a_1+su_1+tv_1\\ y&=a_2+su_2+tv_2\\ z&=a_3+su_3+tv_3. \end{aligned}$$

Az **egyenes skaláregyenletrendszere** a következő alakú:

$$\begin{aligned} n_1x+n_2y+n_3z-(n_1a_1+n_2a_2+n_3a_3)&=0\\ n_1'x+n_2'y+n_3'z-(n_1'a_1'+n_2'a_2'+n_3'a_3')&=0. \end{aligned}$$

Tekintsük az egyenes $p=a+tu$ irányvektoros egyenletét, és legyen $u=u_1e_1+u_2e_2+u_3e_3$, $p=xe_1+ye_2+ze_3$, $a=a_1e_1+a_2e_2+a_3e_3$. Ekkor

$$xe_1+ye_2+ze_3=(a_1+tu_1)e_1+(a_2+tu_2)e_2+(a_3+tu_3)e_3$$

amiből a koordináták egyértelműsége miatt az **egyenes paraméteres egyenletrendszere** következik:

$$\begin{aligned} x&=a_1+tu_1\\ y&=a_2+tu_2\\ z&=a_3+tu_3. \end{aligned}$$

Ha egyik u_i koordináta sem zérus, akkor a t paramétert kifejezve az $\frac{x-a_1}{u_1}=\frac{y-a_2}{u_2}=\frac{z-a_3}{u_3}$ **kanonikus egyenletrendszer**t kapjuk.

Két egyenes közbezárt szögén az egyenesek által meghatározott két szög közül a kisebbiket értjük, azaz ha irányvektoraik u és v, az egyenesek szöge α, akkor

$$\cos\alpha=\frac{|uv|}{|u||v|}.$$

Egyenes és sík szögén az egyenes és a síkbeli merőleges vetületének szögét értjük. Mivel ez nem más, mint az egyenese irányvektora és a sík normálvektora szógének kiegészítő szöge, ha az irányvektor v, a normálvektor n, az egyenes és a sík szöge α, akkor

$$\sin\alpha=\frac{|nu|}{|n||u|}.$$

Két metsző sík szögén a síkra illeszkedő, a metszésvonalra merőleges egyeneseik szögét értjük. Ez megegyezik a síkokra merőleges egyenesek szögével, azaz ha a normálvektorok m és n, a síkok szöge α, akkor

$$\cos\alpha = \frac{|mn|}{|m||n|}.$$

Vizsgálhatjuk még térelemek távolságát is. Általában **két ponthalmaz távolsága** a két halmazból vett pontpárok távolságainak az infimuma.

10.8. Állítás.

(i) *Két A és B, a és b helyvektorú pont távolsága $\sqrt{(a-b)^2}$.*

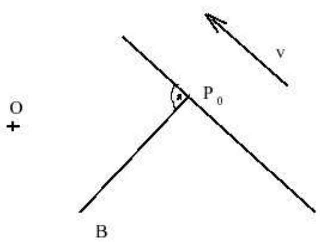
(ii) *A B, b helyvektorú pont és a $p = a + tv$ irányvektoros egyenletű egyenes távolsága a pontnak és az egyenesen levő P_0 merőleges vetületének a távolsága. A merőleges vetület a $p_0 = a + t_0 v$ helyvektorú pont, ahol a t_0 valós szám az $(a + tv - b)v = 0$ egyenlet megoldása.*

(iii) *Két párhuzamos egyenes távolsága az egyik egy pontjának és a másik egyenesnek a távolságával egyezik meg.*

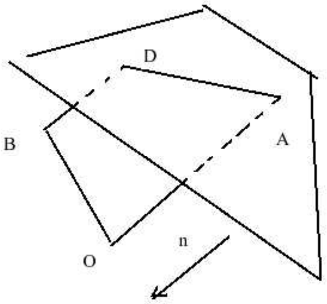
(iv) *A B, b helyvektorú pont és az $n(p-a) = 0$ normálvektoros egyenletű egyenes előjeles távolsága $\frac{1}{|n|}n(b-a)$, 0 ha a pont a síkon van, pozitív illetve negatív annak megfelelően, hogy a pont abban a féltérben van-e, amerre a normálvektor mutat, illetve az ellenkezőben.*

(v) *Két párhuzamos sík távolsága az egyik egy pontjának és a másik síknak a távolságával egyezik meg.*

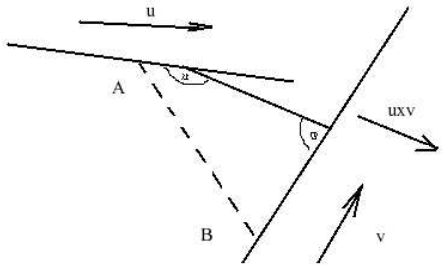
(vi) *Két kitérő egyenes távolsága a normáltranszverzálisuk hossza, ez az az egyértelműen meghatározott szakasz, amely mindkét egyenesre merőleges. Ha az egyenesek irányvektoros egyenletei $p = a + su$ és $p = b + tv$, akkor a normáltranszverzális hossza $\frac{|(a-b)(u\times v)|}{|u\times v|}$.*



Bizonyítás. Az (i), (iii) és (v) állítások nyilvánvalóak, a (ii) állítás az ábrából világos, a (iv) és a (vi) állítások szorulnak precizírozott bizonyításra.



(iv) Legyen a sík adott pontja A, a B pont merőleges vetülete a síkon a D pont, $w = \overrightarrow{DA}$, és az előjeles távolság δ. Ekkor $a = b - \delta\frac{1}{|n|}n + w$, azaz $\delta\frac{1}{|n|}n = b - a + w$, ahonnan $\delta\frac{1}{|n|}n^2 = (b-a)n + wn$ következik. Mivel $n^2 = |n|^2$ és $wn = 0$, kapjuk, hogy $\delta = \frac{1}{|n|}n(b-a)$.



(vi) A normáltranszverzális létezése és egyértelműsége geometriából ismert, irányvektora nyilván $u \times v$, hossza az $a-b$ transzverzális vektor merőleges vetületének hossza a normáltranszverzális egyenesén, azaz a skaláris szorzat definíciója alapján $\frac{|(a-b)(u\times v)|}{|u\times v|}$. $\square$

11. Vektorterek

A szabadvektorok tulajdonságainak általánosításaként kapjuk a következő fogalmat. Azt mondjuk, hogy a $(V,+)$ Abel-csoport **vektortér a K test felett**, ha minden λ K testbéli elemhez és a V halmazbeli elemhez hozzá van rendelve egy λa V halmazbeli elem úgy, hogy tetszőleges $a, b \in V$ és $\lambda, \mu \in K$ elemekre teljesülnek az alábbiak:

(1) $\lambda(a+b) = \lambda a + \lambda b$;
(2) $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$;
(3) $(\lambda\mu)a = \lambda(\mu a)$;
(4) $1a = a$.

A V halmaz elemit **vektor**oknak, a K test elemeit **skalár**oknak, a λa vektort az a **vektor skalárszorosának**, a $(V,+)$ struktúra o neutrális elemét **zérusvektor**nak nevezzük.

Gyakorlásképpen ellenőrizze, hogy minden a vektorra és λ skalárra $0a = o$ és $(-\lambda)a = -(\lambda a)$.

Azt mondjuk, hogy a $\sum_{i=1}^{r}\gamma_i c_i$ vektor a $c_1, c_2, \ldots, c_r$ **vektorok lineáris kombinációja**. A $\{c_i\}_{i\in I}$ (esetleg végtelen elemszámú) **vektorrendszer lineáris kombinációjá**nak nevezzük a v vektort, ha a vektorrendszer valamely véges részrendszere vektorainak lineáris kombinációja.

Ha a vektorrendszer lineáris kombinációi kimerítik az egész V halmazt, akkor a vektorrendszert **a V vektortér generátorrendszer**ének nevezzük. **Véges dimenziós vektortér**nek nevezzük az olyan vektorteret, amelynek létezik véges elemszámú generátorrendszere. Az alábbiakban ilyen vektorterekkel foglalkozunk.

Ha a $\{c_i\}_{i=1}^r$ véges vektorrendszer lineáris kombinációjaként a zérusvektor csak egyféleképpen, csupa 0 együtthatóval állítható elő, akkor azt mondjuk, hogy a vektorrendszer **lineárisan független**; ellenkező esetben azt mondjuk, hogy **lineárisan függő**. **Végtelen elemszámú vektorrendszer lineárisan független**, ha minden véges részrendszere lineárisan független; ellenkező esetben **lineárisan függő**. Véges dimenziós vektortér **bázis**ának nevezünk egy lineárisan független generátorrendszerét. Bázisban a vektorok felírása lineáris kombinációként nyilván egyértelmű.

11.1.Állítás. *Legyen V véges dimenziós vektortér a K test felett. A $\{a_i\}_{i=1}^r$ nemzérus vektorokból álló véges vektorrendszer lineárisan összefüggő pontosan akkor, ha valamely $2 \le k \le r$ számra az a_k vektor az $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}$ vektorok lineáris kombinációja.*

Bizonyítás. Szükségesség. Legyen $o = \sum_{i=1}^r \alpha_i a_i$, ahol nem mindegyik együttható zérus. Legyen k a legnagyobb index, amelyre $\alpha_k \neq 0$. Ha $k = 1$ lenne, akkor $o = \alpha_1 a_1$ miatt $a_1 = o$ következne, ami lehetetlen. Így $k \geq 2$. Ekkor $a_k = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{\alpha_k}\alpha_i a_i$ a kívánt lineáris kombináció.

Elégségesség. Ha $a_k = \sum_{i=1}^{k-1} \beta_i a_i$ akkor a $o = \sum_{i=1}^{k-1} \beta_i a_i - a_k$ nemtriviális lineáris kombináció. □

11.2.Tétel. *Véges dimenziós vektortérnek létezik véges bázisa, és minden bázis elemszáma megegyezik.*

Bizonyítás. Minimális generátorrendszer nem lehet lineárisan függő, mert akkor el lehetne belőle hagyni egy vektort, és generátorrendszer maradna. Így létezik véges bázis. Legyen $\{a_i\}_{i=1}^r$ minimális elemszámú bázis, és $\{b_j\}_{j=1}^{r+1}$ egy nagyobb elemszámú (esetleg végtelen) bázis lineárisan független részrendszere. Tekintsük a $\{b_1, a_1, a_2, \dots, a_r\}$ vektorrendszert. Ez nyilván lineárisan függő generátorrendszer. A 11.1 állítás miatt ezekből valamelyik a_i az előzőek lineáris kombinációja, esetleges átindexelés után feltehető. hogy ez a_r. Azaz a $\{b_1, a_1, a_2, \dots, a_{r-1}\}$ rendszer generátorrendszer.

Tekintsük a $\{b_1, b_2, a_1, a_2, \dots, a_{r-1}\}$ vektorrendszert. Ez nyilván lineárisan függő generátorrendszer. A 11.1 állítás miatt ezekből valamelyik a_i az előzőek lineáris kombinációja, esetleges átindexelés után feltehető. hogy ez a_{r-1}. Azaz a $\{b_1, b_2, a_1, a_2, \dots, a_{r-2}\}$ rendszer generátorrendszer. És így tovább, véges sok csere után azt kapjuk, hogy $\{b_1, b_2, \dots, b_r\}$ generátorrendszer, ami ellentmond annak, hogy a $\{b_j\})_{j=1}^{r+1}$ rendszer lineárisan független. □

11.3.Következmény. *Legyen V véges dimenziós vektortér a K test felett. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:*

(i) a V-beli $\{a_i\}$ vektorrendszer bázis;
(ii) az $\{a_i\}$ vektorrendszer minimális elemszámú generátorrendszer;
(iii) az $\{a_i\}$ vektorrendszer maximális elemszámú lineárisan független rendszer.

Bizonyítás. Maximális elemszámú lineárisan független rendszer generátorrendszer, mert ha nem lenne az, lenne olyan vektor, amely nem lineáris kombinációja a rendszernek, így azt hozzávéve a lineáris függetlenség megmaradna. Az előző tétel alapján a bázisok, a maximális lineárisan független rendszerek és a minimális generátorrendszerek elemszáma megegyezik. □

Véges dimenziós vektortér bázisainak közös elemszámát a **vektortér dimenziójá**nak nevezzük.

Vektortér nemüres részhalmazát **lineáris altér**nek nevezzük, ha két tetszőleges vektorával együtt azok tetszőleges lineáris kombinációját is tartalmazza.

Lineáris altér egyúttal nyilván vektortér is. Gyakorlásképpen lássa be, hogy lineáris alterek metszete lineáris altér.

Azt mondjuk, hogy a V **vektortér** az A_i $(i = 1, 2, \ldots, r)$ **altereinek direkt összege**, ha az $\cup_{i=1}^{r} A_i$ halmaz generátorrendszer, és az $\cup_{i \neq k} A_i$ halmaz által generált altér és az A_k altér metszete a zérusaltér minden $1 \leq k \leq r$ index esetén. Jelölés: $V = A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_r$

11.4.Tétel. *Legyen V véges dimenziós vektortér és A lineáris altere.*
(i) Az A altér szintén véges dimenziós.
(ii) Létezik B altér úgy, hogy a V vektortér az A és B altereinek direkt összege.

Bizonyítás. Az A vektortér maximális $\{a_i\}$ lineárisan független rendszere a V véges n dimenziós vektortér lineárisan független rendszere is egyúttal, ezért elemszáma véges, nem nagyobb mint a V vektortér dimenziója. Következésképpen A véges r dimenziós vektortér, és $\{a_i\}_{i=1}^{r}$ egy bázisa, ami az (i) állítást igazolja. Egészítsük ki az A altér bázisát a következő módon. Ha $r < n$ akkor legyen b_1 a $V \setminus A$ halmaz tetszőleges eleme. Nyilván $\{a_1, a_2, \ldots, a_r, b_1\}$ lineárisan független rendszer, bázisa az A_1 altérnek. Ha $r + 1 < n$ akkor legyen b_2 a $V \setminus A_1$ halmaz tetszőleges eleme. Nyilván $\{a_1, a_2, \ldots, a_r, b_1, b_2\}$ lineárisan független rendszer, bázisa az A_2 altérnek. És így tovább, $n - r$ lépés után kapjuk az $\{a_1, a_2, \ldots, a_r, b_1, b_2, \ldots, b_{n-r}\}$ n elemszámú lineárisan független rendszert, amely az egész V vektortér bázisa. Legyen B az az altér, amelynek bázisa $\{b_1, b_2, \ldots, b_{n-r}\}$. Ha $u \in A \cap B$ akkor $u = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i a_i$ és $u = \sum_{j=1}^{n-r} \beta_j b_j$, ahonnan $o = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i a_i - \sum_{j=1}^{n-r} \beta_j b_j$ a zérusvektor felírása a bázisban, ami csak akkor lehetséges, ha mindegyik együttható nulla, azaz u a zérusvektor. Nyilván minden $v \in V$ vektor egyértelműen írható fel $v = a + b$ alakban, ahol $a \in A$ és $b \in B$. A (ii) állítást is beláttuk. □

11.5.Tétel. *Véges dimenziós vektortér egydimenziós alterek direkt összege.*

Bizonyítás. Legyen $\{a_i\}_{i=1}^{n}$ bázis, Ka_i az a_i vektor által generált altér. Ekkor a V vektortér a Ka_i altereinek direkt összege. □

Tekintsük a rendezett elem n-esek K^n **n-dimenziós koordinátaterét**, ahol

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n)+(b_1, b_2, \ldots, b_n) = (a_1+b_1, a_2+b_2, \ldots, a_n+b_n),\ \lambda(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \ldots, \lambda a_n).$$

A K^n tér nyilván n-dimenziós vektortér K felett. Az $e_i = (0, \ldots, 0, \underset{\underline{i}}{1}, 0, \ldots, 0)$ elem n-esek a tér **kanonikus bázis**át alkotják. Nyilván $K^n = Ke_1 \oplus Ke_2 \oplus \cdots \oplus Ke_n$. Bázis rögzítése után a vektorokat azonosítva a koordinátáik alkotta rendezett elem n-esekkel tetszőleges n-dimenziós vektorteret azonosíthatunk a koordinátatérrel.

2-dimenziós valós vektortér a komplex számok teste, bázisa $\{1, i\}$. A bázisban való felírás nem más, mint az algebrai alak.

Nem minden vektortér véges dimenziós. Végtelen dimenziós vektortér a valós számok teste a racionális számok teste felett: lineárisan független rendszert alkotnak a π valós szám $1, \pi, \pi^2, \pi^3, \ldots$ hatványai, mivel a π szám nem gyöke egyetlen nemnulla racionális polinomnak sem, úgynevezett transzcendens szám. Végtelen dimenziós vektortér a K test feletti polinomok $K[x]$ tere is, bázisa az x határozatlan $1, x, x^2, x^3 \ldots$ hatványai.

Véges testek.

Fontosak a kódelméleti alkalmazások szempontjából a **véges testek**, ezek egyszerűen a véges elemszámú testek. Ilyenekkel találkoztunk már, a modulo prímszám maradékosztálygyűrűk a prímelemű testek. Ezek p **prímkarakterisztikájú testek**: a p-elemű testben az 1-et p-szer összeadva nullát kapunk, és ez a legkisebb ilyen pozitív egész. Ezzel ellentétben a számtestek **nullkarakterisztikájú**ak, akárhányszor adjuk össze az 1-et, nem kapunk nullát.

Találkoztunk már **ciklikus csoport**okkal: ezek olyan csoportok, amelyben – ha a művelet a szorzás – minden elem előáll egy elem, a **generátorelem** egész kitevős hatványaként. Ilyenek voltak az n-edik egységgyökök csoportjai, generátorelemek a primitív n-edik egységgyökök.

Legyen p prímszám, Z_p a p-elemű test. A véges testek konstrukciója azon alapul, hogy észrevesszük, hogy az $x^{p^n}-1$ Z_p test feletti polinom valamely Z_p testnél bővebb testbéli összes, p^n számú gyöke a négy alapműveletre nézve zárt halmazt, azaz testet alkot. Ehhez azt a tényt kell ismerni, hogy a p-edik binomiális együtthatók az elsőt és az utolsót kivéve oszthatóak p-vel, és emiatt p prímkarakterisztikájú kommutatív gyűrűben összeget p-edik hatványra lehet tagonként hatványozni. Annak a belátása, hogy létezik olyan test, amelyben a polinom összes gyöke benne van, mélyebb elméleti meggondolásokat igényel. Ezért a véges testek alaptételét bizonyítás nélkül közöljük.

11.6.Tétel. *Ha K véges test, akkor K p prímkarakterisztikájú és elemszáma p-hatvány. Megfordítva, ha p prímszám és n pozitív egész, akkor létezik p^n-edrendű test. Véges test nemnulla elemei a szorzásra nézve ciklikus csoportot alkotnak.*

A véges testet **p^n-edrendű Galois-test**nek nevezzük és $\mathrm{GF}(p^n)$-nel jelöljük. Bizonyos további elméleti megfontolások miatt másképpen konstruáljuk meg a véges testeket, hogy számolni lehessen bennük. Legyen $q(x)$ n-edfokú irreducibilis polinom a Z_p test fölött. Ilyen létezése tetszőleges pozitív egész n-re biztosított. Legyen a egy gyöke, hogy milyen objektum, arról közelebbit nem mondunk. Tekintsük azt az n-dimenziós vektorteret, amelynek bázisa $\{1, a, a^2, \ldots, a^{n-1}\}$, azaz $\mathrm{GF}(p^n) = Z_p \oplus Z_p a \oplus Z_p a^2 \oplus \cdots \oplus Z_p a^{n-1}$, Elemei a lineáris kombinációk, az együtthatók tetszőleges Z_p p-elemű testbéli elemek, számuk valóban p^n. Az összeadás elvégzése magától értetődő, szorozni úgy szorzunk, mint több tagot több taggal szoktunk, az n-nél nagyobb fokszámú tagokat leredukáljuk n-nél kisebb fokszámú tagok összegére a $q(a) = 0$ számolási szabály alapján. A szorzás és az osztás elvégzését leegyszerűsíthetjük, ha keresünk az egységek csoportjában generáló elemet, azaz olyan elemet, amelynek $0, 1, 2, \ldots, p^n - 2$-edik hatványaiként előáll az összes többi; ezek után azonos alapú hatványok szorzásánál és osztásánál a kitevőket kell összeadni és kivonni modulo $p^n - 1$.

12. Matrixok

Gyakorta szükséges adatoknak táblázatba rendezése a jobb áttekinthetőség kedvéért. Egy ilyen táblázatot, amelynek m sora és n oszlopa van, **$m \times n$-es matrix**nak nevezünk: precíz definíció szerint egy $A : \{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\} \to K$, $(i, j) \mapsto a_{ij}$ leképezés, ahol K egy kommutatív egységelemes gyűrű. Az $a_{i.j}$ elem a matrix i-edik sorának j-edik eleme. Az ilyen matrixok halmazának szokásos jelölése $K^{m\times n}$. Az $1 \times n$ típusú matrixokat **sormatrix**nak, az $m \times 1$ típusúakat **oszlopmatrix**nak nevezzük Az $A = (a_{ij}) \in K^{m\times n}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

matrix $A^{(k)} = (a_{k1} a_{k2} \cdots a_{kn})$ a matrix **k-adik sor**a, $A_{(l)} = (a_{1l} a_{2l} \cdots a_{ml})$ a matrix **l-edik oszlopa**. Egy matrix bizonyos sorainak és oszlopainak elhagyásával keletkezett matrixot az eredeti matrix **minormatrixá**nak nevezzük. Például az

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

matrixból az első és harmadik sor, illetve az első, második és negyedik oszlop elhagyásával az

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

minormátrixát kapjuk. Bizonyos sorai illetve oszlopai mentén felbontva a matrixot részekre a **matrix blokkjai**t kapjuk. Például az előző matrixot felbonthatjuk a következőképpen:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ - & - & - & | & - & - & - \\ 0 & 0 & 4 & | & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & | & 0 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

négy blokkjára:

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad A_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 6 \\ 0 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Ilyenkor az

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

jelölést használjuk.

Azt a matrixot, amelynek minden eleme nulla, **zérusmatrix**nak nevezzük. Két $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in K^{m\times n}$ **matrix összege** az $A + B = (c_{ij}) \in K^{m\times n}$ matrix, ahol $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Bármely matrix és ugyanolyan típusú zérusmatrix összege az eredeti matrix. Ha $A = (a_{ij}) \in K^{m\times n}$ matrix és $\lambda \in K$ skalár, akkor az A **matrix** λ **skalárszorosa** a $\lambda A = (b_{ij}) \in K^{m\times n}$ matrix, ahol $b_{ij} = \lambda a_{ij}$. Az $A = (a_{ij}) \in K^{m\times n}$ **matrix transzponáltja** az $A^* = (b_{ij}) \in K^{n\times m}$ matrix, ahol $b_{ij} = a_{ji}$. Könnyen látható az alábbi

12.1.Állítás. *Ha K test, akkor az $m \times n$ típusú matrixok $K^{m\times n}$ halmaza a matrixösszeadásra és skalárral való szorzásra nézve mn-dimenziós vektorteret alkot.* $\square$

Az $1 \times n$ típusú sor- ($n \times 1$ típusú oszlop-) matrixok terét azonosíthatjuk az n-dimenziós koordinátatérrel. Megegyezés szerint általában a koordinátákat oszlopmatrixoknak tekintjük.

Ha $A = (a_{ij}) \in K^{m\times r}$, $B = (b_{ij}) \in K^{r\times n}$ **matrixok szorzata** a $C = (c_{ij}) \in K^{m\times n}$ matrix, ahol $c_{kl} = \sum_{i=1}^{r} a_{ki}b_{il}$. A matrixszorzás legfontosabb tulajdonsága, hogy, ha elvégezhető, tetszőlegesen zárójelezhető.

12.2. Állítás. *Ha K kommutatív egységelemes gyürű, $A = (a_{ij}) \in K^{m\times r}$, $B = (b_{ij}) \in K^{r\times s}$ $C = (c_{ij}) \in K^{s\times n}$ akkor $(AB)C = A(BC)$.*

Bizonyítás. Legyen $D = (d_{ij}) = (AB)C \in K^{m\times n}$, $E = AB = (e_{ij}) \in K^{m\times s}$ Ekkor $e_{ki} = \sum_{j=1}^{r} a_{kj}b_{ji}$,

$$d_{kl} = \sum_{i=1}^{s} e_{ki}c_{il} = \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{r} a_{kj}b_{ji}c_{il}.$$

Másrészt legyen $F = (f_{ij}) = A(BC) \in K^{m\times n}$, $G = BC = (g_{ij}) \in K^{r\times n}$ Ekkor $g_{jl} = \sum_{i=1}^{s} b_{ji}c_{il}$,

$$f_{kl} = \sum_{j=1}^{r} a_{kj}g_{jl} = \sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{s} a_{kj}b_{ji}c_{il} = \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{r} a_{kj}b_{ji}c_{il} = d_{kl}.$$

□

Hasonló egyenes számolás annak ellenőrzése, hogy ha elvégezhető, a szorzás az összeadásra nézve ,,disztributív".

12.3. Állítás.

(i) Ha K kommutatív egységelemes gyürű, $A = (a_{ij}) \in K^{m\times r}$, $B = (b_{ij}) \in K^{m\times r}$ $C = (c_{ij}) \in K^{r\times n}$ akkor $(A + B)C = AC + BC$.

(ii) Ha K kommutatív egységelemes gyürű, $A = (a_{ij}) \in K^{m\times r}$, $B = (b_{ij}) \in K^{r\times n}$ $C = (c_{ij}) \in K^{r\times n}$ akkor $A(B + C) = AB + AC$.

Bizonyítás. Az (i) állítást látjuk be, a másik hasonlóan bizonyítható. Legyen $(d_{ij}) = (A + B)C \in K^{m\times n}$. Ekkor

$$d_{kl} = \sum_{i=1}^{r}(a_{ki} + b_{ki})c_{il}.$$

Legyen $(e_{ij}) = AC + BC \in K^{m\times n}$. Ekkor

$$e_{kl} = \sum_{i=1}^{r} a_{ki}c_{il} + \sum_{i=1}^{r} b_{ki}c_{il} = \sum_{i=1}^{r}(a_{ki} + b_{ki})c_{il} = d_{kl}.$$

□

Azt a matrixot, amelynek sor- és oszlopszáma megegyezik, **kavadratikus matrix**nak nevezzük. Az $n \times n$-es (a_{ij}) kvadratikus matrix $(a_{11}\, a_{22} \ldots a_{nn})$ elemeit a **kvadratikus matrix főátlójá**nak nevezzük.Azt a kvadratikus matrixot, amelynek főátlóján kívül csupa 0 áll, **diagonálmatrix**nak nevezzük. Azt a diagonálmatrixot, amelynek főátlójában csupa 1-es áll, **egységmatrix**nak nevezzük. Ha a szorzás elvégezhető, egységmatrixszal akár balról, akár jobbról beszorozva egy matrixot az eredeti matrixot kapjuk vissza.

12.4. Következmény. *Ha K kommutatív egységelemes gyűrű, n pozitív egész, akkor az $n \times n$-es K gyűrű feletti kvadratikus matrixok a matrixösszeadásra és a matrixszorzásra nézve egységelemes gyűrűt alkotnak.* □

Ezt a gyűrűt a K test feletti $n\times n$-es **teljes matrixgyűrű**nek nevezzük. A kvadratikus matrixok vektorterének kanonikus bázisát alkotják az e_{ij} **matrixegységek**: ennek a matrixnak (i, j)-edik pozíciójában 1 áll, a többi helyen 0. Gyakorlásképpen ellenőrizze a matrixegységek szorzási szabályát: $e_{ij}e_{kl} = e_{il}$, ha $j = k$, egyébként a zérusmatrix. Ha $i = j$, akkor az e_{ii} matrixegység **idempotens matrix**, azaz olyan nemnulla matrix, amelynek négyzete önmaga;

Ha $i \neq j$, akkor az e_{ij} matrixegység **nilpotens matrix**, azaz olyan matrix, amelynek valamelyik pozitív kitevős hatványa a zérusmatrix; speciálisan $i \neq j$ esetén már $e_{ij}^2 = 0$. Ha $n > 1$ akkor a $K^{n\times n}$ matrixgyűrűben a szorzás nemkommutatív, $e_{12}e_{21} = e_{11}$ de $e_{21}e_{12} = e_{22}$.

Szimmetrikus matrixnak nevezzük azt a kvadratikus matrixot, amely megegyezik transzponáltjával. **Ferdeszimmetrikus matrix**nak nevezzük azt a A kvadratikus matrixot, amelynek transzponáltja a matrix ellentettje, azaz $A^* = -A$. **Felső (alsó) trianguláris** matrixnak nevezzük azt a kvadratikus matrixot, amelynek főátlója alatt (fölött) csupa 0 áll. **Monomiális matrix**nak nevezzük azt a matrixot, amelynek minden sorában és oszlopában pontosan egy nemnulla elem áll.

13. Matrixok determinánsa

Szükségünk lesz a **permutáció paritásá**nak fogalmára. Az

$$\begin{pmatrix} 1\;2\;3\ldots\;n \\ i_1\;i_2\;i_3\ldots\;i_n \end{pmatrix}$$

permutáció inverziójának nevezzük a (k,l) párt, ha $1 \leq k < l \leq n$ és $i_k > i_l$. A permutációt **páros**nak nevezzük, ha inverzióinak száma páros. Könnyen látható, hogy permutáció páros pontosan akkor, ha diszjunkt ciklusok szorzatára történő felbontásában a páros hosszú ciklusok száma páros, páros permutációk szorzata páros, továbbá n elem páros és páratlan permutációinak száma megegyezik, $\frac{n!}{2}$.

Hasznosnak fog bizonyulni egy kvadratikus matrixhoz egyetlen jellemző skalárértéket rendelni (test feletti matrixokat fogunk tekinteni, bár kiépíthető az elmélet az egészekre, polinomokra is), amelyet a **matrix deteminánsá**nak nevezünk: ha $A = (a_{ij})$ $n \times n$ típusú kvadratikus matrix a K test felett, akkor determinánsa legyen

$$|A| = \sum_{\sigma\in S_n} (-1)^\sigma a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)},$$

ahol S_n az $\{1,2,3,\ldots,n\}$ elemek összes permutációinak halmaza, az n-edfokú szimmetrikus csoport, és $(-1)^\sigma$ 1 illetve -1 annak megfelelően, hogy a σ permutáció páros illetve páratlan. A determinánst tekinthetjük a matrix oszlopvektorainak $d : K^n \times K^n \times \cdots K^n \to K$, $(A_{(1)}, A_{(2)}, \ldots, A_{(n)}) \mapsto d(A_{(1)}, A_{(2)}, \ldots, A_{(n)}) = |A|$ függvényeként. Az alapvető tulajdonságok az alábbiak.

13.1.Tétel. *Legyen K test, $A \in K^{n\times n}$ kvadratikus matrix.*

(i) A determinánsfüggvény minden változójában lineáris, azaz ha $A_{(i)}, B_{(k)} \in K^{n\times 1}$ oszlopmatrixok $(i,k = 1,2,\ldots,n)$ és $\lambda \in K$ skalár, akkor
$d(A_{(1)}, A_{(2)}, \ldots, A_{(k)} + B_{(k)}, \ldots, A_{(n)}) =$

$$d(A_{(1)}, A_{(2)}, \ldots, A_{(k)}, \ldots, A_{(n)}) + d(A_{(1)}, A_{(2)}, \ldots, B_{(k)}, \ldots, A_{(n)}),$$

$$d(A_{(1)}, A_{(2)}, \ldots, \lambda A_{(k)}, \ldots, A_{(n)}) = \lambda d(A_{(1)}, A_{(2)}, \ldots, A_{(k)}, \ldots, A_{(n)}).$$

(ii) Ha $\delta \in S_n$ egy permutáció, akkor

$$d(A_{(\delta(1))}, A_{(\delta(2))}, \ldots, A_{(\delta(n))}) = (-1)^\delta d(A_{(1)}, A_{(2)}, \ldots, A_{(n)}),$$

azaz az oszlopokat felcserélve a determináns értéke nem változik vagy előjelet vált annak megfelelően, hogy az alkalmazott permutáció páros vagy páratlan. Speciálisan, a determináns előjelet vált, ha két oszlopát felcseréljük.

(iii) A determináns értéke 0 pontosan akkor, ha a matrix oszlopvektorai lineárisan függetlenek.
(iv) A determináns értéke nem változik, ha egyik oszlopához hozzáadjuk egy másik oszlop skalárszorosát.
(v) A determináns értéke nem változik ha a matrixot transzponáljuk.
(vi) Az (i)-(iv) állítások érvényben maradnak, ha a matrix oszlopai helyett a sorait tekintjük.

Bizonyítás. (i) Legyen $A = (a_{ij})$, $B_{(k)} = (b_{ik})$. Ekkor a

$$\sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots (a_{\sigma^{-1}(k)k} + b_{\sigma^{-1}(k)k}) \cdots a_{n\sigma(n)}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{\sigma^{-1}(k)k} \cdots a_{n\sigma(n)} + \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots b_{\sigma^{-1}(k)k} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

összefüggés az első, a

$$\sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots \lambda a_{\sigma^{-1}(k)k} \cdots a_{n\sigma(n)} = \lambda \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{\sigma^{-1}(k)k} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

összefüggés a második linearitási tulajdonságot mutatja.

(ii) Legyen az $A = (a_{ij})$ matrixból az oszlopfelcserélés után kapott matrix A^δ. A definíció szerint

$$|A^\delta| = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma a_{1\sigma\delta(1)} a_{2\sigma\delta(2)} \cdots a_{n\sigma\delta(n)} = \sum_{\sigma\delta \in S_n} (-1)^\sigma (-1)^{\sigma\delta} (-1)^{\sigma\delta} a_{1\sigma\delta(1)} a_{2\sigma\delta(2)} \cdots a_{n\sigma\delta(n)} =$$

$= (-1)^\delta |A|$, amit be kellett látni.

(iii) Ha az oszlopvektorok lineárisan függők, akkor valamelyik közülük kifejezhető a többi lineáris kombinációjaként. Az előző linearitási tulajdonság miatt a determináns olyan determinánsok lineáris kombinációjaként írható, amelyekben két oszlop megegyezik. Ezért elegendő belátni, hogy az ilyen determináns nulla. Valóban, legyen $C = (c_{ij}) \in K^{n \times n}$ olyan matrix, amelynek k-adik és l-edik oszlopa ($k \neq l$) megegyezik, és legyen $\nu = (kl)$ az a transzpozíció, amely a k és l számokat felcseréli. Ekkor

$$|C| = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma c_{1\sigma(1)} c_{2\sigma(2)} \cdots c_{\sigma^{-1}(k)k} \cdots c_{\sigma^{-1}(l)l} \cdots c_{n\sigma(n)} =$$

$$\sum_{\sigma\nu \in S_n} (-1)^{\sigma\nu} c_{1\sigma(1)} c_{2\sigma(2)} \cdots c_{\sigma^{-1}(k)l} \cdots c_{\sigma^{-1}(l)k} \cdots c_{n\sigma(n)},$$

azaz, mivel a σ és $\sigma\nu$ ellenkező paritású permutációk, az összegben párosíthatjuk a tagokat úgy, hogy egymás ellentettjeik legyenek: a $(-1)^\sigma c_{1\sigma(1)} c_{2\sigma(2)} \cdots c_{\sigma^{-1}(k)k} \cdots c_{\sigma^{-1}(l)l} \cdots c_{n\sigma(n)}$ és a $(-1)^{\sigma\nu} c_{1\sigma(1)} c_{2\sigma(2)} \cdots c_{\sigma^{-1}(k)l} \cdots c_{\sigma^{-1}(l)k} \cdots c_{n\sigma(n)}$ tagok egymás ellentettjei. Így a $|C|$ determináns értéke nulla.

Ha az $A_{(i)}$ oszlopvektorok lineárisan függetlenek, akkor az oszlopvektorok vektorterében bázist alkotnak, és az E egységmatrix $E_{(i)}$ oszlopainak mindegyike felírható lineáris kombinációjukként. Nyilván az egységmatrix determinánsa 1, és a linearitást felhasználva

$$1 = d(E_{(1)}, E_{(2)}, \ldots, E_{(n)}) = d\left(\sum_{i=1}^n \alpha_{1i} A_{(i)},) \sum_{i=1}^n \alpha_{2i} A_{(i)}, \ldots, \sum_{i=1}^n \alpha_{ni} A_{(i)}\right)$$

olyan determinánsok lineáris kombinációja, amelyben vagy legalább két oszlop megegyezik, és ezek nullák az állítás első része alapján, vagy olyan matrixok determinánsa, amelyet az A matrix oszlopainak permutálásával kaptunk, és ezek értéke a (ii) állítás szerint csak előjelben különbözhet az $|A|$ determináns értékétől. Kaptuk, hogy az $|A|$ determináns értéke valamely skalárral beszorozva 1-et ad, azaz nulla nem lehet.

A (iv) állítás világos az előzőekből, az (v) a definícióból és (vi) az (v) állításból. □

Közvetlenül a definícióból kiszámítani a determináns értékét nehézkes. Ezek a tulajdonságok lehetőséget adnak a determináns egyszerű kiszámítására. Nyilvánvaló a definícióból, hogy egy alsó- vagy felsőtrianguláris matrix determinánsa a főátlóban lévő elemek szorzata. A (ii) és a (iv) tulajdonságok pedig lehetővé teszik, hogy a matrixot ilyen alakúvá transzformáljuk. Példa egy számításra:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -6 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & -1 \\ 0 & 3 & 9 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 13 & -4 \\ 0 & 0 & 27 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 13 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -95 \end{vmatrix} = -95$$

A transzformációk rendre:

- Az első két sor felcserélése, az első sor -2, -3, illetve 2-szeresének hozzáadása a második, harmadik illetve negyedik sorhoz;
- a második sor -3-szorosának hozzáadása a harmadik és negyedik sorhoz;
- a harmadik és negyedik sor felcserélése, a negyedik sor -2-szeresének hozzáadása a harmadikhoz;
- a harmadik sor -13-szorosának hozzáadása a negyedikhez.

Két sor (oszlop) felcserélését, egy sor (oszlop) szorzását nemnulla skalárral, egy sor (oszlop) skalárszorosának a hozzáadását egy másik sorhoz (oszlophoz) **elemi sor- (oszlop) transzformációk**nak nevezzük. Világos, hogy elemi sor- (oszlop) transzformációkkal egy testfölötti matrix trianguláris alakra hozható.

Egy másik módszer a determináns kiszámítására a következő úgynevezett kifejtési tételen alapul.

13.2.Tétel. *Legyen K test, $A \in K^{n \times n}$ kvadratikus matrix, $A_{ij} \in K^{n-1 \times n-1}$ az a minormatrix, amelyet az A matrix i-edik sorának és j-edik oszlopának elhagyásával kapunk. Ha $1 \leq k, l \leq n$ akkor*

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+l} a_{il} |A_{il}| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} |A_{kj}|.$$

Bizonyítás. Az első, oszlop szerinti kifejtést látjuk be, a másik hasonlóan igazolható. Legyen $\{e_i\}$ a K^n oszlopvektorok vektorterének kanonikus bázisa, és B_i az a matrix, amelyet az A matrixból úgy kapunk, hogy az l-edik oszlopot kicseréljük az e_i oszloppal. Ekkor $A = \sum_{i=1}^{n} a_{il} B_i$, és a 13.1(i) állítás miatt $|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{il} |B_i|$. Ezért elegendő belátni, hogy $|B_i| =$

$(-1)^{i+l}|A_{il}|$. A B_i matrix $i-1$ sorcsere és $l-1$ oszlopcsere után

$$\begin{pmatrix} 1 & | & & * & \\ -- & -- & -- & -- & -- \\ 0 & | & & & \\ \vdots & | & & A_{il} & \\ 0 & | & & & \end{pmatrix}$$

alakra hozható, amelyben az első sor és oszlop elhagyásával keletkezett minormatrix A_{il}. A definíció alapján közvetlenül adódik, hogy ennek a matrixnak a determinánsa, ami 13.1(i) állítás miatt $(-1)^{i+l}|B_i|$, éppen az $|A_{il}|$ determináns. $\square$

A tétel lehetőséget ad a determináns értékének kiszámítására. A 2×2-es $|(a_{ij})|$ determináns értéke nyilván $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$. Előző példánknál maradva:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -6 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & -1 \\ 0 & 3 & 9 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -6 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \\ 3 & 9 & 2 \end{vmatrix} =$$

$= -(1((-5)2-(-1)9)-(-6)(3\cdot 2-(-1)3)+1(3\cdot 9-(-5)3)) = 1-54-42 = -95.$

Hasznos lehet a determináns kiszámításánál az a tény, hogy ha az A matrix blokkjai $B \in K^{k\times k}$, $C \in K^{l\times l}$ és $D \in K^{k\times l}$ úgy, hogy

$$A = \begin{pmatrix} B & D \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

akkor $|A| = |B||C|$.

A determináns fogalma segítségével könnyen megjegyezhető a szabadvektorok kereszt- illetve vegyesszorzatának kiszámítási módja ortonormált e_1, e_2, e_3 bázisban $\{\alpha_i\}$, $\{\beta_i\}$ és $\{\gamma_i\}$ koordinátákkal adott a, b és c vektorok esetén (lásd 10.5 és 10.6):

$$a \times b = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} \quad (a,b,c) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

A matrixszorzás és a determináns kapcsolatát vizsgálja a szorzási tételként említett

13.3.Tétel. *Szorzatmatrix determinánsa a determinánsok szorzata.*

Bizonyítás. Legyen $A, B \in K^{n\times n}$ kvadratikus matrix. Tegyük fel, hogy valamelyik matrix determinánsa 0. Ha $|A| = 0$, akkor az A matrix sorai lineárisan függő rendszert alkotnak és $\sum_{i=1}^n \alpha_i A^{(i)} = o$ a sorvektorok nemtriviális lineáris kombinációja valamely nem mind 0 skalárokra. Innen kapjuk, hogy

$$o = (\sum_{i=1}^n \alpha_i A^{(i)})B = \sum_{i=1}^n \alpha_i A^{(i)} B = \sum_{i=1}^n \alpha_i (AB)^{(i)}$$

a szorzatmatrix sorvektorainak nemtriviális lineáris kombinációja, ahonnan $|AB| = 0 = 0|B| = |A||B|$ következik. Hasonlóan ha $|B| = 0$, akkor a B matrix oszlopai lineárisan függő rendszert alkotnak és $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i B_{(i)} = o$ az oszlopvektorok nemtriviális lineáris kombinációja valamely nem mind 0 skalárokra. Innen kapjuk, hogy

$$o = A(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i B_{(i)}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i AB_{(i)} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (AB)_{(i)}$$

a szorzatmatrix oszlopvektorainak nemtriviális lineáris kombinációja, ahonnan $|AB| = 0 = |A|0 = |A||B|$ következik.

A továbbiakban feltehetjük, hogy egyik matrix determinánsa sem nulla.

Belátjuk, hogy csupán egyetlen elemi sor- (oszlop) transzformáció, egy sor (oszlop) skalárszorosának a hozzáadása segítségével nemnulla determinánsú matrix monomiális matrix alakra hozható. A sortranszformációra látjuk ezt be, az oszlopra hasonlóan igazolható. Az első oszlopban válasszunk ki egy nemnulla elemet (ilyen létezik, mert a determináns nemnulla), a transzformációval elimináljuk az összes többi elemet az oszlopban. Tegyük fel, hogy az első k oszlopot úgy transzformáltuk, hogy bennük pontosan egy-egy elem nemnulla, és ezek különböző sorokban helyezkednek el. A $k+1$-edik oszlopban vannak nemnulla elemek, és ezek közül legalább egy, $a_{i\,k+1}$ nem azokban a sorokban van, amelyekben az előző k oszlop nemnulla elemei állnak, mivel a determináns nemnulla és az oszlopvektorok lineárisan függetlenek. Az i-edik sor első k eleme mind 0, így a transzformációval eliminálhatjuk az összes többi elemet a $k+1$-edik oszlopban, az első k oszlop változatlan marad. Indukció alapján beláttuk, amit kívántunk.

Legyenek az e_{ij} matrixok az egységmatrixok. Nyilvánvaló, hogy az $1 + \lambda e_{ij}$ $(i \neq j)$ matrixszal való balszorzás a j-edik sor λ skalárszorosának a hozzáadását jelenti az i-edik sorhoz, illetve a jobbszorzás az i-edik oszlop λ skalárszorosának a hozzáadását jelenti a j-edik oszlophoz. Ezért léteznek $F_1, F_2, \dots, F_r$ és $G_1, G_2, \dots, G_s$ ilyen alakú matrixok, hogy az $P = F_1F_2 \cdots F_rA$ és a $Q = BG_1G_2 \cdots G_s$ matrixok monomiális matrixok. Nyilván monomiális matrixok szorzata monomiális matrix, benne a nemnulla elemek az egyes tényezők nemnulla elemeinek szorzata, Monomiális matrixok determinánsa a nemnulla elemek szorzata a matrix által meghatározott permutáció paritásának megfelelő előjellel, és monomiális matrixok szorzatának determinánsa a determinánsok szorzata.

Kaptuk, hogy egyrészt

$$|PQ| = |(F_1F_2 \cdots F_rA)(BG_1G_2 \cdots G_s)| = |(F_1F_2 \cdots F_r)AB(G_1G_2 \cdots G_s)| = |AB|,$$

másrészt

$$|PQ| = |P||Q| = |F_1F_2 \cdots F_rA||BG_1G_2 \cdots G_s| = |A||B|.$$

□

14. Lineáris egyenletrendszerek

Lineáris egyenletrendszernek nevezzük a rendezéssel az

$$\begin{gathered}
\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \cdots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1 \\
\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3 + \cdots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \alpha_{m3}x_3 + \cdots + \alpha_{mn}x_n = \beta_m
\end{gathered}$$

alakúra hozható egyenletrendszert, ahol $x_1, x_2, \dots x_n$ ismeretlenek és $\alpha_{ij}, \beta_i \in K$ skalárok. Ha az egyenletrendszer együtthatóiból képzett $A = (\alpha_{ij} \in K^{m\times n})$ matrixot tekintjük, az ismeretleneket $x = (x_i) \in K^{n\times 1}$ és az egyenletek jobb oldalán álló skalárokat $b = (\beta_i) \in K^{n\times 1}$ oszlopvektoroknak fogjuk fel, akkor az egyenletrendszer a tömör $Ax = b$ alakba írható.

Tekintsük először az $Ax = o$ úgynevezett **homogén lineáris egyenletrendszert**, ahol o az $m \times 1$-es oszlopvektorok terének zérusvektora. Azonnal látjuk, hogy a homogén egyenletrendszer mindig megoldható, és a megoldások az $n\times 1$ típusú oszlopvektorok vektorterében H lineáris altért alkotnak. Ha a β_i skalárok nem minegyike 0, akkor az $Ax = b$ egyenletrendszert **inhomogén lineáris egyenletrendszer**nek nevezzük. Az Aw $(w \in K^{n\times 1})$ alakú oszlopvektorok W lineáris altért alkotnak az $m \times 1$ típusú oszlopvektorok vektorterében, így világos, hogy az inhomogén $Ax = b$ egyenletrendszer megoldható pontosan akkor, ha $b \in W$, és ebben az esetben az összes megoldás $u + h$ alakú, ahol $u \in K^{n\times 1}$ az inhomogén egyenletrendszer egy partikuláris megoldása, és $h \in H$ a homogén egyenletrendszer tetszőleges megoldása. Azaz a megoldhatóság esetén az inhomogén lineáris egyenletrendszer összes megoldásainak a halmaza $u + H$; az ilyen alakú vektorhalmazokat, azaz alterek eltoljait **lineáris sokaság**oknak nevezzük.

Az egyenletrendszert a már tárgyalt elemi sortranszformációk segítségével úgynevezett Gauss-eliminációval oldhatjuk meg. Azok az ismeretlenek, amelyek mindegyik együtthatója 0, szabad ismeretlenek, átszámozással ezek legyenek a legnagyobb indexűek. Feltehetjük, hogy az egyenletrendszer matrixa nem a zérusmatrix. Az elimináció lényege hogy elemi sortranszformációkkal a bal fölső sarokból kiindulva az oszlopokat az első egy, kettő, és így tovább elem kivételével elimináljuk. Nyilvánvaló, hogy elemi sortranszformáció az egyenletrendszer ekvivalens átalakítása.

Az $Ax = o$ homogén esetben Gauss-eliminációval az A matrixot

$$\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1n} \\
0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2n} \\
0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3r} & \dots & a_{3n} \\
\vdots & \vdots & & \ddots & & & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & & a_{rr} & \dots & a_{rn} \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0
\end{pmatrix}$$

trapéz alakra hozzuk, ahol az első r sor nem csupa nullából áll, és az első nemnulla elemek oszlopindexei nőnek. Belátjuk indukcióval, hogy ez lehetséges. Az első oszlopban van nemnulla elem, sorcserével elérhető, hogy ez a_{11}. A többi k -adik sorokhoz hozzáadva az első sor $\frac{-a_{k1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}$-szeresét az első oszlop kinullázódik. Tegyük fel, hogy az első $l-1$ oszlop a kívánt alakú. Az esetlegesen kinullázódott sort sorcserével áthelyezhetjük a matrix aljára. Ha az l-edik ozlop $l-1$-nél nagyobb sorindexű elemei mind nullák, készen vagyunk. Ha nem mind nulla, sorcserével elérhető, hogy az $a_{ll}^{(l)}$ elem nem nulla, és a lentebbi k -adik sorokhoz hozzáadva az első sor $\frac{-a_{kl}^{(l)}}{a_{ll}^{(l)}}$-szeresét az l-edik oszlop kinullázódik.

Ha $r = n$ és mindegyik a_{ii} együttható nemzérus (a matrix háromszög alakú), akkor a megoldás egyértelmű, a megoldásaltér a zérusaltér. Egyébként a szabad ismeretlenek száma $n-r$, ezeknek a $t_1, t_2, \dots, t_{n-r}$ szabad paraméter értéket adva visszahelyettesítések után az r kötött ismeretlen kifejezhető, vagyis ha $x_i = \sum_{j=1}^{n-r} \xi_{ij} t_j$ $(i = 1, 2, \dots, n)$, az általános megoldás

$$x = \begin{pmatrix} \xi_{11} \\ \xi_{21} \\ \vdots \\ \xi_{n1} \end{pmatrix} t_1 + \begin{pmatrix} \xi_{12} \\ \xi_{22} \\ \vdots \\ \xi_{n2} \end{pmatrix} t_2 + \cdots + \begin{pmatrix} \xi_{1n-r} \\ \xi_{2\,n-r} \\ \vdots \\ \xi_{n\,n-r} \end{pmatrix} t_{n-r}, \quad (t_j \in K),$$

vagyis $h_j = (\xi_{ij}) \in K^{n\times 1}$ oszlopvektor jelöléssel $Kh_1 \oplus Kh_2 \oplus \cdots \oplus Kh_{n-r}$ az oszlopvektorok $n-r$ dimenziós megoldásaltere.

Az $Ax = b$ inhomogén esetben legyen a b oszlopvektorral kibővített A matrix B. Ezen végrehajtva az eliminációt (mint a homogén esetben, csak a transzformációkat az utolsó oszlopon is el kell végezni) az

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3r} & \dots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & a_{rr} & \dots & a_{rn} & b_r \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

trapéz alakra hozzuk. Az egyenletrendszer pontosan akkor nem oldható meg, ha az eljárás során valamelyik sor az utolsó oszlopbeli elem kivételével csupa nulla értékű lesz; ez nyilvánvalóan ellentmondásos egyenlet. Ha megoldható, $r = n$ és mindegyik a_{ii} együttható nemzérus, akkor a megoldás egyértelmű. Ha megoldható, akkor, mint a homogén esetben, a szabad ismeretleneknek szabad paraméterértékeket adva, visszahelyettesítések után kapjuk az $x_i = \mu_i + \sum_{j=1}^{n-r} \xi_{ij} t_j$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ megoldásokat, azaz az általános megoldás

$$x = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \xi_{11} \\ \xi_{21} \\ \vdots \\ \xi_{n1} \end{pmatrix} t_1 + \begin{pmatrix} \xi_{12} \\ \xi_{22} \\ \vdots \\ \xi_{n2} \end{pmatrix} t_2 + \cdots + \begin{pmatrix} \xi_{1n-r} \\ \xi_{2\,n-r} \\ \vdots \\ \xi_{n\,n-r} \end{pmatrix} t_{n-r}, \quad (t_j \in K),$$

vagyis $h_j = (\xi_{ij}), u = (\mu_i) \in K^{n\times 1}$ oszlopvektor jelöléssel, $u + Kh_1 \oplus Kh_2 \oplus \cdots \oplus Kh_{n-r}$ az oszlopvektorok $n-r$ dimenziós megoldássokasága.

15. Matrix rangja, invertálhatóság

Egy **matrix sorrangjának (oszloprangjának)** nevezzük sorvektorai (oszlopvektorai) maximális lineárisan független rendszerének az elemszámát.

13.4.Lemma. *Elemi sor- és oszloptranszformációkkal szemben a sorrang (oszloprang) invariáns.*

Bizonyítás. Az állítást az oszloprangra látjuk be, a sorrangra ebből transzponálás után adódik. Mivel az oszloprang az oszlopvektorok által generált altér dimenziója, elemi oszloptranszformációkkal szemben az oszloprang nyilván invariáns. Legyenek az $A = (a_{ij}) \in K^{m\times n}$ matrix oszlopai $A_{(j)}$ $(j = 1, 2, \dots, n)$.

Legyen egy elemi sortranszformációval kapott matrix $B = (b_{ij})$, oszlopai $B_{(j)}$. Nyilván teljesül, hogy $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j A_{(j)} = 0$ pontosan akkor, ha $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j B_{(j)} = 0$ $(\alpha_j \in K)$. Valóban, az összefüggések azt jelentik, hogy az $(\alpha_i) \in K^{n\times 1}$ az $Ax = 0$ illetve a $Bx = 0$ lineáris egyenletrendszerek megoldásai, amely egyenletrendszerek egymással ekvivalensek.

Következésképpen az A matrix oszlopvektorainak nemtriviális lineáris kombinációja a zérus oszlopvektor pontosan akkor, ha a B matrix megfelelő oszlopvektorainak nemtriviális lineáris kombinációja a zérus oszlopvektor ugyanazzal az együtthatókkal. Kaptuk, hogy az A és B matrixok oszloprangja megegyezik. □

Nagyjelentőségű a matrixok rangszámtétele.

15.2.Tétel. *Matrix oszlop- és sorrangja megegyezik.*

Bizonyítás. Ha a matrix a zérusmatrix, az állítás nyilvánvaló. Ha nem, elemi sor- és oszloptranszformációkkal a matrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3r} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rn} \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

alakra hozható, ahol az $a_{ii} \neq 0$, és a sor- és oszloprang nem változott a lemma alapján. Ennek a matrixnak a sorrangja nyilván r, oszloprangja legalább r. Azoknak az oszlopvektoroknak az altere, amelyben a felső r elem tetszőleges, a többi nulla, nyilván r dimenziós, így az oszloprang is pontosan r. □

A közös sor- és oszloprangot a **matrix rangjá**nak nevezzük.

A lineáris egyenletrendszerrel kapcsolatos az eddigiek alapján azonnal adódó Kronecker–Capelli tétel.

15.3.Tétel.
- *(i) Lineáris egyenletrendszer megoldható pontosan akkor, ha matrixának és kibővített matrixának rangja megegyezik.*
- *(ii) Megoldható lineáris egyenletrendszer megoldássokaságának dimenziója megegyezik az ismeretlenek számának és az egyenletrendszer matrixa rangjának különbségével.* □

A 13. paragrafusbeli kifejtési tétel kiegészítése a

15.4.Lemma. *Legyen $A \in K^{n\times n}$ kvadratikus matrix, A_{ij} az A matrix i-edik sorának és j-edik oszlopának elhagyásával keletkezett minormatrix. Ekkor $j \neq l$ esetén $\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+l} a_{ij} |A_{il}| = 0$, és $i \neq k$ esetén $\sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{ij} |A_{kj}| = 0$.*

Bizonyítás. Az első összefüggést bizonyítjuk, a másik hasonlóan látható. Jelölje B azt a matrixot, amelynek j-edik oszlopát az l-edik oszloppal helyettesítettük. Mivel két oszlopa megegyezik, a B matrix determinánsa nulla, és a kifejtési tétel adja az összefüggést, amit be kellett látni. □

Invertálható kvadratikus matrixot szokás **nemszinguláris matrix**nak is nevezni.

15.5.Tétel. *Kvadratikus $A \in K^{n\times n}$ testfölötti matrix invertálható pontosan akkor, ha determinánsa nem zérus.*

Bizonyítás. Szükségesség. Legyen az inverz A^{-1}, és jelölje E az egységmatrixot. A 13.3 szorzási szabály szerint $1 = |E| = |AA^{-1}| = |A||A^{-1}|$, és az A matrix determinánsa nem lehet nulla.

Elégségesség. Legyen $A = (a_{ij})$, A_{ij} az A matrix i-edik sorának és j-edik oszlopának elhagyásával keletkezett minormatrix, és $b_{ij} = \frac{(-1)^{i+j}}{|A|}|A_{ji}|$ (az a_{ij} matrixelem úgynevezett kofaktora). Ekkor a $B = (b_{ij})$ matrix az A matrix inverze, mivel a kifejtési tétel és a lemma alapján $AB = BA$ az egységmatrix. □

Másik módszer az inverz kiszámítására a Gauss elimináción alapul. Legyen a matrix nemszinguláris, és bővítsük ki a matrixot jobbról melléírva az egységmatrixot. Hozzuk eliminációval az eredeti matrixot felső trianguláris alakra úgy. hogy a műveleteket az egész matrixon végrehajtjuk, majd még egyszer hasonló módon a főátló feletti elemeket elimináljuk. Ekkor a bal oldali $n \times n$-es matrix diagonális, alkalmas skalárokkal beszorozva a sorokat a bal oldalon az egységmatrixot, a jobb oldalon az eredeti matrix inverzét kapjuk.

Egyértelműen megoldható lineáris egyenletrendszerekre szolgáltat megoldást Cramer szabálya.

15.6.Tétel. *Legyen $A \in K^{n\times n}$ nemszinguláris kvadratikus matrix, $b \in K^{n\times 1}$ oszlopmatrix és $x = (x_i)$ az ismeretlenek $n \times 1$ típusú oszlopvektora. Ekkor az $Ax = b$ egyenlet egyértelműen megoldható. Ha B_i az a matrix, amelyet az A matrixból az i-edik oszlopának a b oszlopvektorral történő kicserélése után kapunk, akkor az egyenletrendszer megoldása $x_i = \frac{|B_i|}{|A|}$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ alakú.*

Bizonyítás. Legyen A^{-1} az A matrix inverze, amely a nemszingularitás miatt létezik. Ekkor $x = A^{-1}b$ oszlopvektor megoldás, mivel $A(A^{-1}b) = (AA^{-1})b = Eb = b$, ahol E az egységmatrix. Ha az u oszlopvektor megoldás, akkor $Au = b$, ahonnan $A^{-1}(Au) = A^{-1}b$ és $u = A^{-1}b$ adódik.

Be kell még látni, hogy az $x_i = \frac{|B_i|}{|A|}$ értékek a megoldások. Felírva az Ax matrix k-adik sorát, és kifejtve a $|B_j|$ determinánst j-edik oszlopa szerint kapjuk, hogy

$$\frac{1}{|A|}\sum_{j=1}^{n} a_{kj}|B_j| = \frac{1}{|A|}\sum_{j=1}^{n} a_{kj}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}b_i|A_{ij}| =$$

$$\frac{1}{|A|}\sum_{i=1}^{n} b_i \sum_{j=1}^{n} a_{kj}(-1)^{i+j}|A_{ij}|,$$

amely kifejezésben a második szumma $i = k$ esetén a kifejtési tétel alapján az $|A|$ determináns, $i \neq k$ esetén pedig a 15.4 állítás miatt nulla; így a teljes kifejezés értéke b_k, amit be kellett látni. □

16. Lineáris leképezések

Ha V és W véges dimenziós vektorterek a K test fölött, $\varphi : V \to W$ leképezésre teljesül, hogy minden $a, b \in V$ vektorra és $\lambda \in K$ skalárra $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$ és $\varphi(\lambda a) = \lambda\varphi(a)$, akkor azt mondjuk, hogy φ **lineáris leképezés**. A $\varphi(V)$ halmazt a leképezés **képteré**nek nevezzük. Azt mondjuk, hogy a $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{a \in V|\, \varphi(a) = o\}$ a **lineáris leképezés magtere**. Bijektív lineáris leképezést **izomorfizmus**nak nevezünk.

Gyakorlásképpen lássa be, hogy lineáris leképezést egyértelműen meghatároz egy bázison felvett értékei, és megfordítva, egy bázis vektoraihoz való tetszőleges hozzárendelés lineáris leképezést határoz meg.

Megjegyeztük a 11.paragrafusban, hogy bázis rögzítése után a vektorokat azonosítva a koordinátáik alkotta rendezett elem n-esekkel tetszőleges n-dimenziós vektorteret azonosíthatunk a koordinátatérrel. Gyakorlásképpen lássa be, hogy az izomorfizmus fogalmát használva ez az észrevétel úgy pontosítható, hogy n dimenziós K test feletti vektortér izomorf a K^n n-dimenziós koordinátatérrel.

A lineáris leképezések legegyszerűbb tulajdonságai az alábbiak.

16.1.Állítás. *Legyen $\varphi : V \to W$ lineáris leképezés. Ekkor aközvetkező állítások teljesülnek.*

(i) $\varphi(o) = o$;

(ii) minden $a \in V$ *vektorra* $\varphi(-a) = -\varphi(a)$;

(iii) a képtér a W *vektortér lineáris altere;*

(iv) a magtér a V *vektortér lineáris altere;*

(v) a φ *leképezés injektív pontosan akkor, ha a magtér a zérusaltér.*

Bizonyítás. (i) A $\varphi(a) = \varphi(o + a) = \varphi(o) + \varphi(a)$ egyenlőség mindkét oldalából kivonva a $\varphi(a)$ vektort kapjuk, hogy $o = \varphi(o)$ (mindkét vektortér zérusvektorát ugyanúgy jelöltük).

(ii) Az előző állítást felhasználva $o = \varphi(o) = \varphi(a + (-a)) = \varphi(a) + \varphi(-a)$, az egyenlőség mindkét oldalából kivonva a $\varphi(a)$ vektort kapjuk, hogy $-\varphi(a) = \varphi(-a)$.

(iii) Nyilván az (i) állítás miatt $o = \varphi(o) \in \varphi(V) = T$, így ez nemüres halmaz. Legyen $c, d \in T$. Ekkor létezik $a, b \in V$ vektor úgy, hogy $c = \varphi(a)$, $d = \varphi(b)$, és ha $\lambda, \mu \in K$ skalárok, $\lambda c + \mu d = \lambda\varphi(a) + \mu\varphi(b) = \varphi(\lambda a + \mu b) \in T$, azaz a T képtér valóban lineáris altér.

(iv) Az (i) állítás miatt $o \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, így ez nemüres halmaz. Legyen $a, b \in \mathrm{Ker}(\varphi)$ a magtér eleme és $\lambda, \mu \in K$ skalár. Ekkor $\varphi(\lambda a + \mu b) = \lambda\varphi(a) + \mu\varphi(b) = \lambda o + \mu o = o$, és a $\lambda a + \mu b$ vektor a magtér eleme, azaz a magtér valóban lineáris altér.

(v) Ha φ injektív, akkor W zérusvektorának egyetlen ősképe van, nyilván $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{o\}$. Megfordítva, ha $\varphi(a) = \varphi(b)$ akkor $0 = \varphi(a) - \varphi(b) = \varphi(a - b) \in \mathrm{Ker}(\varphi) = \{o\}$, azaz $a - b = o$, $a = b$. $\square$

A lineáris leképezés képterének dimenzióját a **lineáris leképezés rangjá**nak, a magtér dimenzióját a **lineáris leképezés nullitásá**nak nevezzük. A következő tétel a nullitás + rang tételként ismeretes.

16.2.Tétel. *Legyen $\varphi : V \to W$ lineáris leképezés, ahol V és W véges dimenziós vektorterek a K test felett. Ekkor a V vektortér dimenziója megegyezik a φ leképezés nullitásának és rangjának az összegével.*

Bizonyítás. A 11.4 állítás alapján legyen A olyan lineáris altér, hogy a V vektortér a magtér és az A altér direkt összege. Szűkítsük le a φ leképezést $\overline{\varphi} : A \to \varphi(V)$ leképezéssé. Ez nyilván lineáris marad; magtere $\mathrm{Ker}(\overline{\varphi}) = \mathrm{Ker}(\varphi) \cap A = \{o\}$ a zérusaltér. Szürjektív is, mivel ha $v \in V$ tetszőleges vektor, akkor $v = u + a$ alkalmas $u \in \mathrm{Ker}(\varphi)$ és $a \in A$ vektorokkal, és $\varphi(v) = \varphi(u + a) = \varphi(u) + \varphi(a) = o + \varphi(a) = \varphi(a) = \overline{\varphi}(a)$. Következésképpen $\overline{\varphi}$ izomorfizmus. Izomorfizmus nyilván bázist bázisba visz át, így az A komplemens és a $\varphi(V)$ képtér dimenziója megegyezik. A belátandó állítás abból következik, hogy a V vektortér dimenziója a magtér és az A komplemens dimenziójának az összege. $\square$

Két $\varphi, \psi : V \to W$ **lineáris leképezés összege** a $\varphi + \psi : V \to W$, $(\varphi + \psi)(a) = \varphi(a) + \psi(a)$ leképezés, **lináris leképezés λ skalárszorosa** a $\lambda\varphi : V \to W$, $(\lambda\varphi)(a) = \lambda\varphi(a)$ leképezés.

16.3.Tétel. *A V K test feletti vektorteret W K test feletti vektortérbe képező lineáris leképezések az összeadásra és a skalárral való szorzásra nézve vektorteret alkotnak.*

Bizonyítás. Belátjuk, hogy lineáris leképezések összege és skalárszorosa is lineáris leképezés. A többi tulajdonság igazolása gyakorlat. Valóban,

$$(\varphi+\psi)(a+b) = \varphi(a+b)+\psi(a+b) = \varphi(a)+\varphi(b)+\psi(a)+\psi(b) = (\varphi(a)+\psi(a))+(\varphi(b)+\psi(b)) =$$

$= (\varphi + \psi)(a) + (\varphi + \psi)(b)$, továbbá

$$(\varphi + \psi)(\lambda a) = \varphi(\lambda a) + \psi(\lambda a) = \lambda\varphi(a) + \lambda\psi(a) = \lambda(\varphi(a) + \psi(a)) = \lambda(\varphi + \psi)(a),$$

azaz a $\varphi + \psi$ leképezés lineáris. Hasonlóan egyszerű számolással

$$(\lambda\varphi)(a + b) = \lambda\varphi(a + b) = \lambda(\varphi(a) + \varphi(b)) = \lambda\varphi(a) + \lambda\varphi(b) = (\lambda\varphi)(a) + (\lambda\varphi)(b)$$

illetve

$$(\lambda\varphi)(\mu a) = \lambda\varphi(\mu a) = \lambda\mu\varphi(a) = \mu\lambda\varphi(a) = \mu(\lambda\varphi)(a),$$

azaz a $\lambda\varphi$ leképezés lineáris. □

A V vektorteret a V vektortérbe képző lineáris leképezést a V **vektortér lineáris transzformációjá**nak nevezzük.

16.4.Tétel. *A V K test feletti vektortér lineáris transzformációi az összeadásra és a kompozíciószorzásra nézve egységelemes gyűrűt alkotnak.*

Bizonyítás. Belátjuk, hogy lineáris transzformációk kompozíciószorzata is lineáris transzformáció. A többi tulajdonság igazolása gyakorlat. Valóban,

$$(\varphi \circ \psi)(a + b) = \varphi(\psi(a + b)) = \varphi(\psi(a) + \psi(b)) = \varphi(\psi(a)) + \varphi(\psi(b)) = (\varphi \circ \psi)(a) + (\varphi \circ \psi)(b)$$

továbbá

$$(\varphi \circ \psi)(\lambda a) = \varphi(\psi(\lambda a)) = \varphi(\lambda\psi(a)) = \lambda\varphi(\psi(a)) = \lambda(\varphi \circ \psi)(a),$$

azaz a $\varphi \circ \psi$ leképezés lineáris. □

A φ V K test feletti n-dimenziós vektorteret a W K test feletti m-dimenziós vektortérbe képező **lineáris leképezés matrixa** az $\{a_j\}$ V-beli és $\{b_i\}$ W-beli bázisokra vonatkozóan az $A = (\alpha_{ij}) \in K^{m\times n}$ matrix, ha

$$\varphi(a_j) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} b_i.$$

Azaz az A matrix j-edik oszlopát a V vektortér j-edik báziseleme képének a koordinátái alkotják a W vektortér bázisára nézve. Speciálisan, ha $V = W$ és $a_i = b_i$, akkor azt mondjuk, hogy az A matrix a φ **lineáris transzformáció matrixa az** $\{a_i\}$ **bázisra vonatkozóan**.

16.5.Állítás. *Legyen V illetve W K test feletti n iletve m dimenziós vektortér bázisai $\{a_j\}$ illetve $\{b_i\}$. Ha a $\varphi : V \to W$ lineáris leképezés matrixa erre a két bázisra nézve $m(\varphi) = A$ és a $c \in V$ vektornak az $\{a_j\}$ bázisra vonatkozó koordinátái alkotta oszlopmatrix C, akkor a $\varphi(c)$ vektornak az $\{b_i\}$ bázisra vonatkozó koordinátái alkotta oszlopmatrix AC. Továbbá, az m leképezés izomorfizmus a V vektorteret a W vektortérbe vivő lineáris leképezések tere és a $K^{m\times n}$ matrixok tere között. Speciálisan, a lineáris leképezések tere mn dimenziós.*

Bizonyítás. Legyen $A = (\alpha_{ij}) \in K^{m\times n}$, $C = (\gamma_{i1}) \in K^{n\times 1}$, $AC = \delta_{i1} \in K^{m\times 1}$. Ekkor $\delta_{i1} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\gamma_{j1}$, és

$$\sum_{i=1}^{m} \delta_{i1} b_i = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\gamma_{j1} b_i = \sum_{j=1}^{n} \gamma_{j1} \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} b_i =$$

$$\sum_{j=1}^{n} \gamma_{j1}\varphi(a_j) = \varphi(\sum_{j=1}^{n} \gamma_{j1} a_j) = \varphi(c),$$

amit be kellett látni.

Nyilvánvaló, hogy két lineáris leképezés összegének a matrixa a leképezések matrixainak összege, lineáris leképezés skalárszorosának a matrixa a leképezés matrixának adott skalárszorosa, és csak az azonosan zérus leképezés matrixa a zérusmatrix. Az m leképezés szürjektivitása abból adódik, hogy a bázisvektorok képének tetszőleges megadása meghatároz egy lineáris leképezést. □

Gyakorlásképpen lássa be, hogy lineáris leképezés rangja megegyezik matrixának rangjával.

Legyen $Ax = B$ lineáris egyenletrendszer ($A \in K^{m\times n}, B \in K^{m\times 1}$), φ lineáris leképezés, amelynek az $\{a_j\}_{j=1}^{n}$, $\{b_i\}_{i=1}^{m}$ bázisokra vonatkoztatott matrixa A, legyen b az a vektor, amelynek a $\{b_i\}$ bázisra vonatkoztatott koordinátái a B oszlopvektort alkotják. Ekkor a lineáris egyenletrendszer átalakítható $\varphi(x) = b$ alakúvá. Kronecker–Capelli tétele ebben az átfogalmazásban így szól: A $\varphi(x) = b$ lineáris egyenletrendszer megoldható pontosan akkor, ha a b vektor a képtér eleme. Megoldható $\varphi(x) = b$ lineáris egyenletrendszer megoldássokaságának dimenziója megegyezik a φ leképezés értelmezési tartománya dimenziójának és a leképezés rangjának különbségével.

A matrixszorzás és a lineáris transzformációk kompozíciószorzásának kapcsolatáról szól a

16.6.Tétel. *Lineáris transzformációk kompozíciószorzatának matrixa a transzformációk matrixainak szorzata.*

Bizonyítás. Legyen V a K test feletti n-dimenziós vektortér bázisa $\{a_j\}$, a $\varphi, \psi : V \to V$ lineáris transzformáció matrixa az $\{a_i\}$ bázisra nézve $A = (\alpha_{ij}) \in K^{n\times n}$ illetve $B = (\beta_{ij}) \in K^{n\times n}$. Legyen $AB = (\gamma_{rs}) \in K^{n\times n}$, ekkor $\gamma_{rs} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ri}\beta_{is}$. Egyszerű számolással kapjuk, hogy

$$\sum_{r=1}^{n} \gamma_{rs} a_r = \sum_{r=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ri}\beta_{is} a_r = \sum_{i=1}^{n} \beta_{is} \sum_{r=1}^{n} \alpha_{ri} a_r =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_{is}\varphi(a_i) = \varphi(\sum_{i=1}^{n} \beta_{is} a_i) = \varphi(\psi(a_s)) = (\varphi \circ \psi)(a_s),$$

amit be kellett látni. □

Legyen a V n-dimenziós vektortér két bázisa $\{a_i\}$ és $\{a_i'\}$. Az $\{a_i\} \to \{a_i'\}$ **báziscsere matrixa** a $C = (\gamma_{ij}) \in K^{n\times n}$ matrix, ahol

$$a_j' = \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ij} a_i.$$

Azaz a C matrix j-edik oszlopát az a_j' vektor koordinátái alkotják az $\{a_i\}$ bázisban, vagy másképpen a C matrix az $a_i \mapsto a_i'$ lineáris transzformáció matrixa az $\{a_i\}$ bázisban. Mivel a transzformáció bázist bázisba visz át, izomorfizmusa a V vektortérnek, emiatt matrixa nemszinguláris.

16.7.Tétel. *Legyen a* V *n-dimenziós vektortér* $\{a_i\} \to \{a'_i\}$ *báziscseréjének matrixa a* $C \in K^{n\times n}$ *matrix. Ha az* $x \in V$ *vektor koordinátái alkotta oszlopvektor az* $\{a_i\}$ *illetve az* $\{a'_i\}$ *bázisban* $X \in K^{n\times 1}$ *illetve* $X' \in K^{n\times 1}$ *akkor* $X' = C^{-1}X$*. Ha* φ *a* V *vektortér lineáris leképezése, amelynek matrixa az* $\{a_i\}$ *illetve az* $\{a'_i\}$ *bázisra vonatkozóan* $A \in K^{n\times n}$ *illetve* $A' \in K^{n\times n}$ *akkor* $A' = C^{-1}AC$*.*

Bizonyítás. Legyen $C = (\gamma_{ij})$, $X = (\xi_{i1})$, $X' = (\xi'_{i1})$, $CX' = (\delta_{i1})$. Ekkor $a'_j = \sum_{i=1}^n \gamma_{ij}a_i$, $\delta_{i1} = \sum_{j=1}^n \gamma_{ij}\xi'_{j1}$ és

$$\sum_{i=1}^n \delta_{i1}a_i = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \gamma_{ij}\xi'_{j1}a_i = \sum_{j=1}^n \xi'_{j1}\sum_{i=1}^n \gamma_{ij}a_i = \sum_{j=1}^n \xi'_{j1}a'_j = x',$$

azaz $CX' = X$, ahonnan $X' = C^{-1}X$ következik.

Legyen $A = (a_{ij})$, $A' = (a'_{ij})$. Ekkor $\varphi(a_j) = \sum_{i=1}^m \alpha_{ij}a_i$, $\varphi(a'_j) = \sum_{i=1}^m \alpha'_{ij}a'_i$, továbbá egyrészt

$$\varphi(a'_j) = \sum_{i=1}^m \alpha'_{ij}a'_i = \sum_{i=1}^m \alpha'_{ij}\sum_{k=1}^n \gamma_{ki}a_k =$$

$$\sum_{k=1}^n a_k \sum_{i=1}^m \alpha'_{ij}\gamma_{ki},$$

másrészt

$$\varphi(a'_j) = \varphi(\sum_{i=1}^n \gamma_{ij}a_i) = \sum_{i=1}^n \gamma_{ij}\varphi(a_i) =$$

$$\sum_{i=1}^n \gamma_{ij}\sum_{k=1}^m \alpha_{ki}a_k = \sum_{k=1}^m a_k\sum_{i=1}^n \gamma_{ij}\alpha_{ki}.$$

Kaptuk, hogy $\sum_{i=1}^n \alpha_{ki}\gamma_{ij} = \sum_{i=1}^m \gamma_{ki}\alpha'_{ij}$ minden k, j indexre, azaz $AC = CA'$, ahonnan $C^{-1}AC = A'$ adódik. $\square$